Die Elemente

der

allgemeinen

Arithmetik,

einschließlich der

Algebra,

für den

Unterricht an Gymnasien, Gewerb- und Realschulen und ähnlichen Lehranstalten, sowie zum Privatstudium,

von

D. Joh. Karl Friedr. Trautner.

Nürnberg,

Verlag der Joh. Phil. Raw'schen Buchhandlung,

1853.

Preis eines Exemplars: 24 Ngr. oder 1 fl. 21 kr. rhein.
Parthiepreis für Schulen: 20 Ngr. oder 1 fl. 12 kr. rhein.

Die Elemente

der

Mathematik,

für den

Unterricht an Gymnasien, Gewerb- und Realschulen und ähnlichen Lehranstalten, sowie zum Privatstudium,

von

D. Joh. Karl Friedr. Trautner.

Erster Theil.

Allgemeine Arithmetik und Algebra.

Nürnberg,

Verlag der Joh. Phil. Raw'schen Buchhandlung,

1853.

Die Elemente

der

allgemeinen Arithmetik,

einschließlich der

Algebra,

für den Unterricht an Gymnasien, Gewerb- und Realschulen und ähnlichen Lehranstalten, sowie zum Privatstudium,

von

D. Joh. Karl Friedr. Träutner.

Nürnberg,

Verlag der Joh. Phil. Raw'schen Buchhandlung,

1853.

Druck der Sebald'schen Officin in Nürnberg.

Vorrede.

Es giebt manches Lehrbuch der Mathematik und insbesondre der allgemeinen Arithmetik und Algebra, aber kaum eins von so hervorragendem Werthe und so allgemeiner Verbreitung, wie wir mehrere Schulgrammatiken der lateinischen und griechischen Sprache besitzen. Ließe sich in dieser Beziehung die mathematische Literatur mit der philologischen vergleichen, so würde der Verfasser des vorliegenden Lehrbuches schwerlich es unternommen haben, selbst ein solches Buch zu schreiben; aber unter den gegebenen Umständen glaubte er immerhin auch einen Versuch wagen zu dürfen, ja vielleicht zu sollen. Wie weit sein Streben gelungen ist, muß er natürlich dahingestellt sein lassen; soviel darf er jedoch versichern, daß seine Arbeit kein Werk von gestern ist. Er hat das Buch schon vor sieben Jahren entworfen und seitdem mehr als einmal ganz durchgearbeitet und zum Theil völlig um-

gearbeitet, also das Horazische „nonum prematur in annum“ fast buchstäblich befolgt.

Der Beschäftigung mit allgemeiner Arithmetik und Algebra soll ein rationeller Unterricht in der gemeinen Arithmetik vorausgehn; es ist nicht wohl gethan, Beides, wie es wohl versucht worden ist, vereinigen zu wollen; vielmehr soll in der allgemeinen Arithmetik nur insofern ein Rückblick auf das gewöhnliche Ziffernrechnen stattfinden, als erst in ihr das Ziffernsystem und das Verfahren beim numerischen Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren seine strengwissenschaftliche Begründung finden kann. Andrerseits sollen die Elemente der allgemeinen Arithmetik und Algebra eine genügende Grundlage für den Unterricht in der höheren Arithmetik bilden; es soll darum auch nicht erst für diesen selbst aufgespart werden, was eine elementare Fassung zuläßt und in dieser schon als unmittelbare Vorbereitung zur höheren Arithmetik dienen kann; doch soll man auch nicht in den Kreis der Elemente ziehen wollen, was erst im Zusammenhange mit andren Gegenständen der höheren Arithmetik gehörig erörtert werden kann. Nach diesen Ansichten hat der Verfasser den Umfang seiner Arbeit bemessen.

Gewerb- und Realschulen und ähnliche Lehranstalten, die auf die Beschäftigung mit den alten Sprachen und den in diesen geschriebenen klassischen Schriften verzichten müssen, haben wohl noch mehr als die Gymnasien Ursache, die Mathematik auch als formelles Bildungsmittel, nicht bloß um des materiellen Nutzens willen, zu hegen und zu pflegen. Deßhalb braucht man sich

aber nicht mit Lehrsätzen und Uebungsbeispielen, die höchstens theoretischen Werth haben, zu befassen; die Mathematik bietet, im Verhältnisse zu der auf sie zu verwendenden Zeit, dessen, was formell bildend und zugleich materiell nützlich ist, mehr als zu viel. Indem der Verfasser diesen praktischen Gesichtspunkt durchgehends festzuhalten sich bemüht und dabei, so weit es die Deutlichkeit zuließ, nach möglichster Kürze des Ausdruckes gestrebt hat dürfte es ihm gelungen sein, bedeutend mehr an wirklich brauchbarem Lehrstoffe in den Raum dieser wenigen Bogen zusammenzudrängen, als ihre geringe Zahl mag vermuthen lassen.

Sollte vielleicht Jemand eine Aufgabensammlung vermissen, so diene Folgendes zur Erläuterung. Nach der Ansicht des Verfassers bedarf der Schüler, behufs des unerläßlichen Nachschlagens und Wiederholens, ein Buch, welches ihm die Grundlehren der Wissenschaft in klarer Fassung und leicht überschaulichem Zusammenhange darbietet; kann oder will man dem Schüler kein solches Buch in die Hände geben, so bleibt nur übrig, mit lästigem Diktiren viele Zeit, die besser angewendet werden könnte, zu verderben. Daß aber der Schüler auch eine gedruckte Aufgabensammlung, sei es nun eine mit dem Lehrbuche verschmolzene oder eine für sich bestehende, in Händen habe, hält der Verfasser für keineswegs nöthig; vielmehr wird es besser sein, wenn der Lehrer selbst je nach Umständen ausgewählte Aufgaben angiebt. Einem selbstthätigen Lehrer kann dies um so weniger schwer fallen als es einige reichhaltige Aufgabensammlungen giebt, von denen hier außer der noch immer vielgebrauchten von Meier Hirsch nur

die seit 1837 bereits in fünfter Auflage erschienene von Heis erwähnt werden mag. Und auf den Mitgebrauch einer solchen Sammlung seien denn auch Diejenigen verwiesen, welche, der Hülfe des Lehrers entbehrend, dieses Buch zum Privatstudium benützen wollen.

Der bereits druckfertige zweite Theil wird die Elemente der Geometrie, einschließlich der ebenen und sphärischen Trigonometrie, enthalten.

Inhalt.

Drittes Buch.

Viertes Buch.

Fünftes Buch.

Sechstes Buch.

Siebentes Buch.

Druckfehler.

Seite 48	Zeile 13	von unten	lies	$\sqrt[c]{a}$	für $\sqrt{a}$.
— 49	— 14	— —	—	$\sqrt[c]{(a^b)}$	— (a^b).
— 52	— 8	— —	—	$\sqrt[3]{8}$	— $\sqrt{8}$.
— 82	— 17	von oben	—	verschiedne	— verschieden.
— 84	— 5	— —	—	$y = \frac{85}{2.8}$	— $y \frac{85}{2.8}$.
— 95	— 2	von unten	—	bb	— ba.
— 115	— 14	— —	—	$\frac{r_1}{(Pr_1 + Qr)Q}$	— $\frac{r}{(Pr_1 + Qr)Q}$.
— 142	— 5	von oben	—	$c_2\ a_1$	— $c_2\ a$.
— —	— 7	— —	—	$b_2\ a_1$	— $b\ a_1$.
— 151	— 17	von unten	—	a^{d+e}	— a^{d+}.
— —	— —	— —	—	a^{d+e}	— a^{+e}.

Erstes Buch.

Erstes Kapitel. Einleitung.

§ 1.

Die **Mathematik** ist die Lehre von den Zahlen und Größen. Ein Theil derselben ist die **Arithmetik** oder **Rechenkunst**, die Lehre von den **Zahlen**, vom **Zählen** und **Rechnen**.

§ 2.

Nummer 1. Dem Begriffe der **Zahl** liegt der Begriff der als Eigenschaft an den Dingen haftenden **Vielheit** zu Grunde. Diese Eigenschaft erkennen wir überall, wo Dinge von einerlei Art und gleichem Namen zusammengestellt sind; wo nur immer solche Dinge vereinigt vorkommen, da tragen sie zusammengenommen die Eigenschaft der Vielheit an sich und ihr Inbegriff erscheint uns als **eine Vielheit** oder, wie man auch sagt, als eine **Menge**.

2. Jede solche Vielheit oder Menge kann man sich vorstellen als sei sie entstanden indem zum einzelnen Dinge ein andres Ding derselben Art und gleichen Namens hinzugekommen sei, zu dieser Verbindung wieder ein solches Ding u. s. f. Auf diese Art stellen sich die Vielheiten oder Mengen der Dinge von selbst in eine vom Einzelding ausgehende Reihe. Jedes Glied dieser Reihe, d. h. jede Vielheit oder Menge, entsteht aus dem Einzeldinge oder der **Einheit**, sodann aus den vorausgehenden Vielheiten durch wiederholtes **Hinzufügen der Einheit**, und umgekehrt kommt man von jedem Gliede dieser Reihe durch wiederholtes **Hinwegnehmen der Einheit** nach und nach auf alle vorhergehenden Reihenglieder und zuletzt auf die Einheit zurück.

3. Untersuchen, welche Stelle irgend eine gegebene Vielheit oder Menge von Dingen in der Reihe der aus demselben Einzeldinge hervorgegangnen, auf dieselbe Einheit zurückführbaren Vielheiten oder Mengen einnehme, indem man (wirklich oder doch in Gedanken) nach und nach jede in dieser Vielheit enthaltene Einheit von der Vielheit wegnimmt, sie zu den schon weggenommenen Einheiten wieder hinzufügt und so die Vielheit allmählich von neuem entstehn läßt, heißt: diese Menge **zählen**, die Vielheit zu einer **bestimmten Vielheit**, zu einer **Zahl** machen. **Zahl** und **bestimmte Vielheit** sind also Dasselbe; hat man eine Menge **gezählt**, so weiß man, **wie viel** Einzeldinge diese Menge in sich begreift, oder, wie man auch sagt, man kennt die **Anzahl** der in dieser Vielheit enthaltenen Einheiten.

4. Wie aber die Eigenschaft der Vielheit überhaupt an Dingen jeder Art, unabhängig von den sonstigen Eigenschaften derselben, haften kann, so kann auch jede bestimmte Vielheit, jede Zahl, Dingen jeder Art als Eigenschaft zukommen; somit können die Zahlen auch an und für sich, abgesehen von den Dingen, welchen sie als Eigenschaften anhängen, betrachtet werden. Bei dieser unabhängigen Betrachtung der Zahlen oder der bestimmten Vielheiten stellen sich diese natürlich wie in ihrer Verbindung mit den gezählten Dingen als eine von der Einheit ausgehende Reihe dar, von deren Gliedern jedes aus den vorhergehenden durch fortgesetztes Hinzufügen der Einheit erzeugt wird und durch wiederholtes Wegnehmen der Einheit auf alle vorhergehenden Reihenglieder und endlich auf die Einheit zurückkommt. Diese Zahlenreihe muß eine endlose sein, da man sich zu jeder beliebigen Zahl immer wieder die Einheit hinzudenken und dadurch ein neues Reihenglied entstehn lassen kann.

§ 3.

1. Um nun jedes Glied dieser Reihe behufs der weiteren Betrachtung von jedem andern unterscheiden zu können, ist vor allem für jedes ein eigner Wortausdruck nöthig, so daß man z. B. die aus der Einheit durch Hinzufügen der Einheit zunächst entstehende Zahl mit dem Worte zwei, die Zahl Zwei (in Adjektiv- oder Substantivform) bezeichnet, die nächste hieraus durch abermaliges Hinzufügen der Einheit entstehende Zahl mit drei, die (Zahl) Drei u. s. f. Der Unmöglichkeit, für jedes Glied der endlosen Zahlenreihe auf diese Art einen eignen Wortausdruck aufzustellen, wird dadurch abgeholfen, daß man nur für einige wenige Zahlen sich eigner Wörter bedient und die Wortausdrücke für alle übrigen Zahlen aus diesen wenigen Wörtern nach bestimmten Sprachgesetzen bildet.

2. Auch die Einheit wird, als Anfangspunkt, von welchem die endlose Zahlenreihe ausgeht, selbst eine Zahl im weiteren Sinne des Wortes (da nämlich im engeren, eigentlichen Sinne unter Zahl nur eine bestimmte Vielheit zu verstehn ist) genannt und als solche durch eins, die (Zahl) Eins ausgedrückt. Ja man geht noch einen Schritt weiter; wie nämlich jedes Glied der Zahlenreihe durch fortgesetztes Wegnehmen der Einheit auf die vorhergehenden Vielheiten und endlich auf die Einheit zurückkommt, so kann man, die Einheit als Glied der Zahlenreihe betrachtend, sich vorstellen, daß auch von diesem Gliede die Einheit weggenommen werde, und indem hiebei nichts übrig bleibt, kann man sogar dieses Nichts gewissermaßen als ein der Eins noch vorausgehendes Glied der Zahlenreihe, als eine Zahl im weiteren Sinne ansehen und in dieser Beziehung mit null, die Null bezeichnen.

3. Damit man aber jede Zahl von jeder andern unterscheiden könne, genügt es noch nicht, für jede einen eignen Wortausdruck zu haben, sondern es bedarf auch einer anschaulichen Bezeichnung, die leichter zu überblicken ist als die schriftlich dargestellten Zahlwörter. Hiezu bedient man sich bekanntlich jetzt vorzugsweise gewisser Zahl-

zeichen oder Ziffern, die, aus Indien stammend, aber erst durch die Araber in Europa bekannter geworden, deßhalb die arabischen genannt zu werden pflegen. Die Art, wie man mittels dieser wenigen (zehn) Ziffern jede Zahl bezeichnet, wird, wie die Benennungen der Zahlen, hier einstweilen als bekannt vorausgesetzt, soll aber später wissenschaftlich erörtert werden.

4. Durch die Zahlwörter und die Ziffern ist nun allerdings dem nächsten Bedürfnisse abgeholfen und es reicht diese wörtliche und schriftliche Bezeichnung bis zu einem gewissen Punkte vollkommen hin, um die Zahlen einer wissenschaftlichen Betrachtung unterwerfen und die Ergebnisse dieser letzteren für das Leben anwenden zu können. Um aber den höheren Anforderungen der Wissenschaft an sich und in ihren Anwendungen zu genügen, bedarf es noch einer andern, allgemeineren Bezeichnungsweise, bei welcher man von der bestimmten Stelle, welche jede Zahl in der Zahlenreihe behauptet, absieht. Hiezu gebraucht man Buchstaben, und zwar vorzugsweise die Kleinbuchstaben des lateinischen Alphabets, wobei, so lange nichts Besondres hinsichtlich der Bedeutung festgesetzt wird, unter jedem Buchstaben jede beliebige Zahl verstanden werden kann. Auf diese Art tragen die Ergebnisse der Betrachtung unmittelbar den Charakter der Allgemeinheit (des Nichtbeschränktseins auf diese oder jene bestimmte Zahl) an sich; nicht zu übersehen ist aber auch der Vorzug der größeren Kürze und Ueberschaulichkeit, den die Buchstabenbezeichnung vor der Ziffernbezeichnung voraus hat.

§ 4.

1. Insofern nun die Arithmetik sich dieser allgemeinen Bezeichnungsweise der Zahlen bedient und dadurch im Stand ist, ihr Gebiet zu erweitern und höheren Anforderungen zu genügen, wird sie zur allgemeinen Arithmetik, im Gegensatze der gemeinen Arithmetik oder gewöhnlichen Rechenkunst. Uebrigens sind die Lehren der letztern aus dem Gebiete der ersteren nicht ausgeschlossen, sondern gehören wenigstens insofern demselben an, als ihnen erst hier ihre letzte wissenschaftliche Begründung zu Theil werden kann, wozu man eben der allgemeinen Bezeichnung der Zahlen durch Buchstaben bedarf.

2. Die allgemeine Arithmetik zerfällt aber selbst wieder in zwei Theile, einen niederen, elementaren, und einen höheren; jener, den vorliegendes Buch zum Gegenstande hat und dem wir die Bezeichnung „Elemente der allgemeinen Arithmetik“ gegeben haben, der sonst auch vorzugsweise unter „allgemeiner Arithmetik“ verstanden wird, bildet gleichsam die Grundlage, worauf das Gebäude der höheren allgemeinen Arithmetik oder schlechthin der „höheren Arithmetik“ oder, wie man sie auch nennt, der „Analysis“ ruht.

§ 5.

1. Jede Zahl ist also ein Glied einer Reihe, in welcher jedes Glied aus dem nächstvorhergehenden durch Hinzufügung und aus dem nächstfolgenden durch Wegnahme der Einheit erzeugt wird. Auf dieser allgemeinsten Beziehung, in welcher alle Zahlen als Glieder der Zahlen-

reihe zu einander stehn, und auf diesen beiden einander entgegengesetzten einfachsten Arten, aus einer gegebenen Zahl eine andre hervorzubringen, beruhen verschiedne verwickeltere Beziehungen einer Zahl zu andren Zahlen und verschiedne weniger einfache Arten, eine Zahl aus zwei oder mehr gegebenen Zahlen abzuleiten. Dieses Ableiten heißt Rechnen und die verschiednen Arten, wie es geschieht, sind die Rechnungsarten, Rechenoperationen, arithmetischen Operationen.

2. Diese Rechnungsarten werden theils durch besondre Zeichen angedeutet, welche man zu den Zeichen der gegebenen Zahlen setzt, theils auch bloß durch die Stellung, welche man letzteren Zeichen gegen einander giebt. Die mit jenen Zeichen der Rechnungsarten verbundnen oder gehörig gegen einander gestellten Zeichen der gegebenen Zahlen drücken zusammen die abzuleitende Zahl aus, und so entstehn aus den einfachen Zahlzeichen oder Rechenausdrücken mehr oder weniger zusammengesetzte.

3. Indem aber hienach eine und dieselbe Zahl, abgesehen von der in § 3, Nummer 4 erwähnten freien Wahl unter den Buchstaben, noch auf sehr verschiedne Weise ausgedrückt werden kann, ergiebt sich das Bedürfniß eines Zeichens, um anzudeuten, daß zwei Rechenausdrücke dieselbe Zahl vorstellen. Hiezu dient das Gleichheitszeichen $=$ (sprich: gleich oder ist gleich), welches zwischen die beiden Ausdrücke gesetzt wird. Zwei durch dieses Zeichen zusammengestellte Rechenausdrücke für eine und dieselbe Zahl bilden eine Gleichung; alles, was vor dem Gleichheitszeichen steht, macht die linke und alles, was nach demselben folgt, die rechte Seite der Gleichung aus.

4. Gleiche (gleichbedeutende) Ausdrücke können überall für einander gesetzt (durch einander ersetzt oder einander substituirt) werden.

Zweites Kapitel. Addition.

§ 6.

1. Die erste, einfachste unter allen Rechnungsarten ist die Addition; sie schließt sich zunächst an das Zählen (§ 2, N. 3). Eine Zahl zu einer andern addiren oder zwei Zahlen (zu einander) addiren oder zwei Zahlen summiren oder die eine Zahl um die andre vermehren heißt nämlich: zu der einen Zahl die Einheiten der andern hinzufügen und so aus beiden gegebenen Zahlen eine dritte ableiten. Jede der gegebenen Zahlen heißt ein Summand; die sich ergebende Zahl heißt ihre Summe. Bezeichnet man die eine gegebene Zahl mit a, die andre mit b, so wird die entstehende dritte Zahl in Hinsicht auf diese Entstehung aus jenen beiden mit Hülfe des zwischen ihre Zeichen gestellten Additionszeichens durch $a + b$ (sprich: a plus b oder a mehr b) dargestellt.

2. Es ist offenbar einerlei, ob man sich die Einheiten des Summanden b zum Summanden a oder die Einheiten des Summanden a

zum Summanden b hinzugefügt denkt; in beiden Fällen kann nur die nämliche dritte Zahl sich ergeben und man kann daher ebenso gut b + a als a + b schreiben, um die Summe von a und b zu bezeichnen.

3. Statt einer Zahl im eigentlichsten Sinne des Wortes (vgl. § 3, 2) kann auch die Eins die Stelle des einen oder des andren Summanden einnehmen; eine solche Summe einer eigentlichen Zahl und der Eins ist natürlich jedesmal die in der Zahlenreihe auf jene Zahl zunächst folgende, z. B. a + 1 die auf a, 1 + b die auf b zunächst folgende Zahl. Ebenso ist 1 + 1 die auf 1 zunächst folgende (erste eigentliche) Zahl 2.

4. Sogar die Null kann, als Zahl im weiteren Sinne, an die Stelle des einen oder des andren Summanden treten; ein solcher Ausdruck wie a + 0 oder 0 + b ist aber nur der Form nach von a oder b verschieden und bezeichnet in der That nichts Andres als eben die Zahl a oder b selbst, da, wenn man nichts zu einer Zahl hinzufügt, diese natürlich nicht geändert wird. Ebenso kann 0 + 0 wieder nur = 0 sein.

§ 7.

1. Zu einer Summe zweier Zahlen, a + b, kann wieder eine dritte Zahl, c, addirt werden sollen. Das Ergebniß ist dann offenbar dasselbe, als wenn man diese dritte Zahl c zum ersten Summanden a der gegebenen Summe addirt und zu der hieraus hervorgehenden Summe a + c den zweiten Summanden b der gegebenen; oder auch dasselbe, als wenn man die dritte Zahl c zum zweiten Summanden b addirt und die hieraus hervorgehende Summe b + c zum ersten Summanden a; in Zeichen:

$$(a + b) + c = (a + c) + b,$$

wo die Klammern andeuten, daß man sich im ersten Falle, den die linke Seite der Gleichung ausdrückt, zunächst a und b, dagegen im zweiten, durch die rechte Seite der Gleichung ausgedrückten Falle zunächst a und c zu einer Zahl verbunden denkt; oder auch

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

2. Wenn umgekehrt zu einer gegebenen Zahl a eine Summe b + c addirt werden soll, so kann man offenbar statt dessen auch den einen oder den andren Summanden, b oder c, zu jener Zahl a addiren und zu der sich hiedurch ergebenden Summe den andren Summanden, c oder b; es ist immer

$$a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b.$$

§ 8.

1. Wie zu einer Summe zweier Zahlen a + b eine dritte Zahl c als neuer Summand hinzutreten und mit ihr eine Summe dreier Summanden bilden kann, so kann zu dieser Summe eine vierte Zahl d, eine fünfte e u. s. f. als neuer Summand treten; oder es kann zu einer Zahl a nicht bloß eine Summe b + c, sondern noch eine zweite d + e, eine dritte f + g u. s. f. addirt werden sollen. Insofern nun jeder solche neue Summand eine zur Summe aller vorhergehen-

den Summanden zu addirende einzelne (durch einen einfachen Buchstaben ausgedrückte) Zahl ist, pflegt man dergleichen Summen mehrerer Summanden oder mehrgliedrige Summen ohne alle Klammern zu schreiben, also z. B. $a + b + c + d + e$ statt $(((a + b) + c) + d) + e$. Wenn man aber zwei oder mehrere von den folgenden Summanden zunächst zu einander und dann erst ihre Summe zur Summe der vorausgehenden Summanden zu addiren hätte, so dürften, um dies genau zu bezeichnen, die Klammern nicht fehlen; z. B. $a + b + (c + (d + e)) + f$ würde man schreiben müssen, um auszudrücken: zu a soll b, zu dieser Summe die Summe von c und der Summe $d + e$, endlich zu allen diesen Summanden noch f addirt werden.

2. Uebrigens erhellt, daß auch in Fällen wie der letzterwähnte durch das Weglassen der Klammern am Werthe oder an der Bedeutung des ganzen Ausdruckes nichts geändert wird, da ja (vgl. § 7) $a + (b + c) = (a + b) + c$, also nach Nummer 1 $= a + b + c$, mithin auch $a + b + (c + (d + e)) + f = a + b + c + (d + e) + f = a + b + c + d + e + f$ sein muß. Ueberhaupt dürfen bei solchen mehrgliedrigen Summen nach Belieben (wie es der jedesmalige Zweck der Rechnung erfordert) Klammern angebracht oder weggelassen, d. h. die Summanden gruppenweise zu Summen zusammengefaßt oder einzeln hingestellt, auch hinsichtlich ihrer Reihenfolge nach Willkür versetzt werden (vgl. § 6, 2), ohne daß dadurch am Werthe des ganzen Ausdruckes etwas geändert würde; es ist z. B. $a + b + c + d + e + f$ auch $= a + b + c + (f + (e + d)) = c + (b + a) + ((d + f) + e)$ u. s. f. Ebenso ist, wenn weiterhin zwei oder mehrere solche mehrgliedrige Summen zu einander addirt werden sollen, die Reihenfolge, in der man ihre einzelnen Glieder (Summanden) addiren will, für das Endergebniß gleichgültig.

§ 9.

1. Eine Zahl ist größer als eine andre, wenn jene in der Reihe der Zahlen auf diese folgt. Die größere Zahl entsteht also aus der kleineren durch einmaliges oder wiederholtes Hinzufügen, die kleinere aus der größeren durch einmaliges oder wiederholtes Wegnehmen der Einheit. Man bezeichnet das Größer- und Kleinersein oder mit einem Worte das Ungleichsein durch das Zeichen $>$ oder $<$ (das Ungleichheitszeichen), welches man so zwischen den Ausdrücken der beiden Zahlen anbringt, daß die Oeffnung des Zeichens dem Ausdrucke der größeren Zahl zugekehrt ist, so daß z. B. $a > b$ heißt: a ist größer als b, oder $c < d$ heißt: c ist kleiner als d.

2. Eine Summe ist demnach größer als jeder Summand derselben (weil sie aus jedem durch Hinzufügen der Einheiten des andern entsteht, § 6, 1 und 2); es ist allgemein $a + b > a$ und $a + b > b$, so lange nämlich a und b eigentliche Zahlen oder auch (vgl. § 6, 3) die Eins bedeuten, somit $a + b$ eine wirkliche Summe ist. Aber auf die bloß formellen Summen $a + o$, $o + b$, $o + o$ (§ 6, 4) leidet dieser Satz keine vollständige Anwendung, d. h. es ist zwar $a + o > o$,

$o + b > o$, aber nicht $a + o > a$, noch $o + b > b$, noch endlich $o + o > o$.

§ 10.

1. Gleiches zu Gleichem addirt giebt nothwendig Gleiches, d. h. wenn zwei Ausdrücke a und b eine und dieselbe Zahl bedeuten, also $a = b$ ist, so ist auch $a + c = b + c$ (vgl. § 5, 4).

2. Umgekehrt: wenn man weiß, daß $a + c = b + c$ ist, so kann man schließen, daß auch $a = b$ sein müsse, oder: wenn zwei gleiche Summen den einen Summanden gemein haben, so müssen auch die zwei andren Summanden einander gleich sein.

3. Ist aber $a > b$, so ist auch $a + c > b + c$. Denn nach § 9 kann man a als die Summe von b und einer andren Zahl d betrachten; dann ist $a + c = (b + d) + c = (b + c) + d$; aber $(b + c) + d$ ist $> b + c$, also auch $a + c > b + c$.

4. Umgekehrt: wenn $a + c > b + c$, so muß auch $a > b$ sein. Denn wäre $a = b$, so müßte (N. 1) $a + c = b + c$ sein, oder wäre $a < b$, so müßte (N. 3) $a + c < b + c$ sein; Beides ist aber gegen die Voraussetzung, daß $a + c > b + c$ sein soll.

Drittes Kapitel. Subtraktion.

§ 11.

1. Eine zweite Rechnungsart ist die Subtraktion. Eine Zahl b von einer andern a subtrahiren heißt: aus diesen beiden Zahlen eine dritte herleiten, welche, wenn man b zu ihr addirt, a giebt. Wie nun aus dieser zu findenden dritten Zahl die eine gegebene, a, dadurch entsteht, daß man die Einheiten der andren gegebenen, b, zur fraglichen dritten Zahl hinzufügt, so muß umgekehrt diese letztere sich ergeben, wenn man so viele Einheiten als b enthält von a wegnimmt (abzieht). Darauf deuten die Ausdrücke Subtraktion (d. h. Wegnahme), subtrahiren (d. h. wegnehmen) und Subtrahend (d. h. wegzunehmende Zahl), welcher letztere die Zahl b bezeichnet. Die Zahl a nennt man den Minuenden, was dem Wortsinne nach darauf deutet, daß a als Summe von b und der zu findenden dritten Zahl größer ist als diese und durch die Wegnahme von so viel Einheiten als b enthält verkleinert, vermindert wird. Die zu findende dritte Zahl nennt man die Differenz, den Unterschied von a und b und bezeichnet sie als Ergebniß der Subtraktion mit Hülfe des zwischen die Zeichen des Minuenden und des Subtrahenden (so daß jener voransteht) gestellten Subtraktionszeichens durch $a - b$ (sprich: a minus b, a weniger b).

2. Hienach ist allgemein

$$(a - b) + b = a;$$

ferner

$$(a + b) - b = a \text{ und } (a + b) - a = b,$$

d. h., wenn man von einer Summe den einen Summanden subtrahirt, so ergiebt sich der andre Summand.

3. Eine Differenz wie $a - 1$, deren Subtrahend 1, ist die in der Zahlenreihe zunächst vor dem Minuenden a stehende (nächstkleinere) Zahl.

4. Ein Ausdruck, welcher die Form einer Differenz, aber Null zum Subtrahenden hat, ist seiner Bedeutung nach vom Minuenden nicht verschieden; es ist allgemein

$$a - o = a.$$

Denn wenn nichts von einer Zahl weggenommen wird, bleibt diese natürlich ungeändert; oder da nach dem Begriffe der Subtraktion $(a - o) + o = a$ sein muß, da ferner auch $a + o = a$, da also $(a - o) + o = a + o$, so muß (§ 10, 2) $a - o = a$ sein. Ebendarum ist auch $o - o = o$.

5. Somit ist $a + o = o + a = a - o$ und $o + o = o - o$.

§ 12.

1. Der Minuend kann auch in Form einer Summe gegeben sein. Von einer Summe $a + b$ eine Zahl c subtrahiren ist aber so viel als diese Zahl vom ersten oder zweiten Summanden subtrahiren und zu dieser Differenz den zweiten oder ersten Summanden addiren; in Zeichen:

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c).$$

Denn es ist $((a + b) - c) + c = a + b$; ferner $((a - c) + b) + c = ((a - c) + c) + b = a + b$; endlich $(a + (b - c)) + c = a + ((b - c) + c) = a + b$; da somit $((a + b) - c) + c = ((a - c) + b) + c = (a + (b - c)) + c$, so muß auch $(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$ sein (§ 11, 2; 7, 1; 10, 2).

2. Umgekehrt muß also auch

$$a + (b - c) = (a + b) - c = (a - c) + b$$

sein, d. h. eine Differenz zu einer Zahl addiren ist so viel als den Minuenden addiren und von der Summe den Subtrahenden subtrahiren, oder auch so viel als von der Zahl, wozu die Differenz addirt werden soll, den Subtrahenden subtrahiren und zu dieser neuen Differenz den Minuenden der gegebenen addiren.

§ 13.

1. Der Minuend kann auch schon in der Form einer Differenz gegeben sein. Von einer Differenz $a - b$ eine Zahl c subtrahiren ist aber so viel als diese Zahl vom Minuenden a subtrahiren und von der sich hiedurch ergebenden Differenz den Subtrahenden b subtrahiren, oder auch so viel als vom Minuenden a die Summe des Subtrahenden b und der weiter zu subtrahirenden Zahl c subtrahiren; in Zeichen:

$$(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c).$$

Denn es ist $((a - b) - c) + (b + c) = (((a - b) - c) + c) + b = (a - b) + b = a$; ferner $((a - c) - b) + (b + c) = (((a - c) - b) + b) + c = (a - c) + c = a$; endlich $(a - (b + c)) +$

$(b + c) = a$; da also $((a - b) - c) + (b + c) = ((a - c) - b) + (b + c) = (a - (b + c)) + (b + c)$, so muß auch $(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c)$ sein (§ 7, 2; 11, 2; 10, 2).

2. Umgekehrt ist also nothwendig auch

$$a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b,$$

d. h. anstatt eine Summe von einer Zahl zu subtrahiren, kann man beliebig den ersten oder den zweiten Summanden von dieser Zahl subtrahiren und dann den zweiten oder den ersten Summanden von der sich ergebenden Differenz.

§ 14.

1. Auch der Subtrahend kann schon in Form einer Differenz gegeben sein. Eine Differenz $b - c$ von einer Zahl a subtrahiren ist aber so viel als den Minuenden b subtrahiren und zu dieser Differenz den Subtrahenden c addiren, oder auch so viel als den Subtrahenden c addiren und den Minuenden b von dieser Summe subtrahiren; in Zeichen:

$$a - (b - c) = (a - b) + c = (a + c) - b.$$

Denn es ist $(a - (b - c)) + (b - c) = a$, ferner nach § 12, 2 und 11, 2 $((a - b) + c) + (b - c) = (((a - b) + c) - c) + b = (a - b) + b = a$, und auch $((a + c) - b) + (b - c) = (((a + c) - b) + b) - c = (a + c) - c = a$; da somit $(a - (b - c)) + (b - c) = ((a - b) + c) + (b - c) = ((a + c) - b) + (b - c)$, so ist nothwendig $a - (b - c) = (a - b) + c = (a + c) - b$ (§ 10, 2).

2. Umgekehrt muß also auch

$$(a - b) + c = (a + c) - b = a - (b - c)$$

sein, d. h. anstatt eine Zahl zu einer Differenz zu addiren, kann man sie zum Minuenden addiren und von der Summe den Subtrahenden subtrahiren, oder man kann auch die Zahl vom Subtrahenden der gegebenen Differenz subtrahiren und diese neue Differenz vom Minuenden der gegebenen.

§ 15.

1. Eine Differenz bleibt ungeändert, wenn man zum Minuenden und zum Subtrahenden Gleiches addirt; in Zeichen:

$$a - b = (a + c) - (b + c).$$

Denn es ist $(a - b) + (b + c) = ((a - b) + b) + c = a + c$; ferner $((a + c) - (b + c)) + (b + c) = a + c$; mithin $(a - b) + (b + c) = ((a + c) - (b + c)) + (b + c)$, folglich $a - b = (a + c) - (b + c)$.

2. Eine Differenz bleibt auch ungeändert, wenn man vom Minuenden und vom Subtrahenden Gleiches subtrahirt; in Zeichen:

$$a - b = (a - c) - (b - c).$$

Denn es ist $(a - b) + (b - c) = ((a - b) + b) - c = a - c$; andrerseits $((a - c) - (b - c)) + (b - c) = a - c$; mithin $(a - b) + (b - c) = ((a - c) - (b - c)) + (b - c)$, folglich $a - b = (a - c) - (b - c)$.

§ 16.

1. Beim Subtrahiren wird zunächst vorausgesetzt, daß der Subtrahend **kleiner** als der Minuend sei. Wäre der Subtrahend dem Minuenden **gleich**, so würde man, von letzterem so viele Einheiten als der Subtrahend, folglich er selbst enthält wegnehmend, zu Null gelangen. Jeder Ausdruck wie $a - a$ ist also $= 0$, was (nach § 10, 2) auch daraus folgt, daß $(a - a) + a = 0 + a$, da nach dem Begriffe der Subtraktion $(a - a) + a = a$ sein muß, während auch $0 + a = a$ ist.

2. Es kommen ferner Ausdrücke vor, welche die Form von Differenzen haben, deren Subtrahend aber **größer** als der Minuend ist. Solche Ausdrücke, die zum Unterschiede von den wirklichen Differenzen **negative Differenzen** genannt werden, haben, aus dem Zusammenhange der Rechnung herausgenommen und für sich betrachtet, gar keine Bedeutung, d. h. sie stellen nicht, wie die wirklichen Differenzen, Glieder der Zahlenreihe vor; wohl aber können sie, wenn sie mit andren Rechenausdrücken nach den für Differenzen geltenden Gesetzen des Rechnens verbunden werden, zu Ergebnissen führen, denen wirkliche Bedeutung zukommt. So z. B. hat $2 - 5$ an sich allerdings keine Bedeutung; kommt aber dieser Ausdruck etwa als Summand einer Summe vor, deren andrer Summand 6 ist, so ist $6 + (2 - 5) = (6 + 2) - 5 = (6 - 5) + 2$, und diese beiden letzten Ausdrücke bedeuten wirklich etwas, nämlich die Zahl 3.

3. Die allgemeine Form, unter welcher jede negative Differenz dargestellt werden kann, ist $a - (a + b)$, vgl. § 9. Behandelt man diesen Ausdruck nach § 13, 2, so ergiebt sich $a - (a + b) = (a - a) - b = 0 - b$. Jede negative Differenz kann demnach auf eine andre formelle Differenz zurückgeführt werden, deren Minuend Null und deren Subtrahend gleich dem Subtrahenden der gegebenen Differenz, vermindert um ihren Minuenden, ist, da $b = (a + b) - a$. Eine solche formelle Differenz, deren Minuend Null, ist insofern selbst wieder eine negative Differenz, als ihr Subtrahend b größer als der Minuend 0 ist; man pflegt sie aber nicht sowohl eine negative **Differenz**, als eine **negative Zahl** zu nennen; auch schreibt man mit Weglassung des Minuenden 0 statt $0 - b$ gewöhnlich bloß $- b$. Da aber der Begriff der **Zahl** hiedurch abermals erweitert wird (vgl. § 3, 2), so nennt man zum Unterschiede die eigentlichen Zahlen einschließlich der Eins **positive Zahlen** und bezeichnet sie, wo es nöthig ist, mit einem vorgesetzten Additionszeichen, z. B. $+ b$; ein Ausdruck, der, wie $- b$ statt $0 - b$, eigentlich statt $0 + b$ steht und daher allerdings auch für b stehn kann (§ 6, 4). Die Null kann beliebig als positiv oder negativ betrachtet werden, denn da $0 + 0 = 0 - 0$ (§ 11, 5), so ist auch $+ 0 = - 0$.

4. An sich sind die negativen Zahlen ebenso bedeutungslose Ausdrücke wie die negativen Differenzen überhaupt und erhalten nur in Verbindung mit andren Rechenausdrücken eine gewisse Bedeutung, soferne sie sich sammt diesen nach den Gesetzen für das Rechnen mit Differenzen

in Ausdrücke umformen lassen, die wirklich Glieder der Zahlenreihe vorstellen. Beispiele solcher Umformungen für den Fall, daß negative Zahlen mit positiven oder unter sich oder mit Null durch das Additions- oder Subtraktionszeichen verbunden vorkommen, sind folgende:

1) $a + (-b) = a + (0 - b) = (a + 0) - b = a - b$;

2) $(-a) + b = (0 - a) + b = (0 + b) - a = b - a$ oder $= 0 - (a - b) = -(a - b)$;

3) $a - (-b) = a - (0 - b) = (a - 0) + b = a + b$;

4) $(-a) - b = (0 - a) - b = 0 - (a + b) = -(a + b)$;

5) $(-a) + (-b) = (0 - a) + (0 - b) = ((0 - a) + 0) - b = ((0 + 0) - a) - b = (0 - a) - b = 0 - (a + b) = -(a + b)$;

6) $(-a) - (-b) = (0 - a) - (0 - b) = ((0 - a) - 0) + b = ((0 - 0) - a) + b = (0 - a) + b = 0 - (a - b) = -(a - b)$;

7) $+ (-b) = 0 + (0 - b) = (0 + 0) - b = 0 - b = -b$;

8) $-(-b) = 0 - (0 - b) = (0 - 0) + b = 0 + b = + b = b$.

§ 17.

1. Wenn mehrere einfache d. h. nicht selbst wieder Summen oder Differenzen, einschließlich der negativen Zahlen, vorstellende Ausdrücke ohne alle Klammern bloß durch Additions- und Subtraktionszeichen verbunden sind, so ist ein solcher Gesammtausdruck so zu verstehn, daß jedes Glied (jeder einzelne Ausdruck) desselben nach Maßgabe des zunächst vor diesem Gliede stehenden Zeichens (seines Vorzeichens) mit dem Ergebnisse der Verbindung aller vorausgehenden Glieder zu verbinden sei; z. B. $a + b - c - d + e - f$ ist so viel als $((((a + b) - c) - d) + e) - f$. Hieraus und aus allem Bisherigen von § 12 an ergiebt sich, daß, sobald auch das Subtraktionszeichen auftritt, man die Klammern nicht mehr unbedingt weglassen oder willkürlich anbringen kann, wie dies nach § 8 geschehen darf, wenn mehrere Ausdrücke bloß durch das Additionszeichen verbunden sind; daß vielmehr sowohl das Weglassen als das Anbringen der Klammern dann öfters eine Veränderung des Additions- in das Subtraktionszeichen und umgekehrt nöthig macht. Steht nämlich vor einer Klammer das Additionszeichen, so kann die Klammer ohne Zeichenänderung weggelassen werden; z. B. statt $a + (b - c)$ darf man schreiben $a + b - c$, weil dies nach Obigem so verstanden wird: $(a + b) - c$ und weil wirklich $a + (b - c) = (a + b) - c$ (§ 12, 2). Steht aber vor einer Klammer das Subtraktionszeichen, so müssen die Zeichen innerhalb der Klammer in die entgegengesetzten d. h. die Additions- in die Subtraktionszeichen und umgekehrt verwandelt werden, wenn man die Klammern weglassen will; z. B. statt $a - (b + c)$ muß dann $a - b - c$ und statt $a - (b - c)$ muß $a - b + c$ geschrieben werden (vgl. § 13, 2 und 14, 1). Ebenso ist z. B.

$$a + (b + (c - d)) = a + b + (c - d) = a + b + c - d;$$
$$a + (b - (c + d)) = a + b - (c + d) = a + b - c - d;$$
$$a + (b - (c - d)) = a + b - (c - d) = a + b - c + d;$$
$$a - (b + (c + d)) = a - b - (c + d) = a - b - c - d;$$
$$a - (b + (c - d)) = a - b - (c - d) = a - b - c + d;$$
$$a - (b - (c + d)) = a - b + (c + d) = a - b + c + d;$$
$$a - (b - (c - d)) = a - b + (c - d) = a - b + c - d.$$

Was man zu thun hat, wenn man umgekehrt Klammern anbringen will, wo vorher keine waren, folgt hieraus von selbst.

2. Da (§ 16, 4) $a + (-b) = a - b$, so kann man umgekehrt statt $a - b$ immer $a + (-b)$ setzen d. h. jede Differenz in Form einer Summe des Minuenden und des negativ genommenen Subtrahenden darstellen. Ebendarum kann man z. B. für $a + b - c - d + e - f$ auch $a + b + (-c) + (-d) + e + (-f)$ schreiben d. h. jenen Ausdruck auch in Form einer Summe darstellen, deren Summanden theils positive theils negative Zahlen sind. Von solchen gemischten mehrgliedrigen Summen, wie man sie im Gegensatze der gleichartigen, deren Summanden bloß eigentliche, positive Zahlen sind, nennen kann, gilt dann wieder alles in § 8 Gesagte; man kann, so lange man die Klammern, in welche jeder negative Summand eingeschlossen ist, beibehält, im Uebrigen beliebig Klammern weglassen und anbringen, auch die Summanden nach Willkür versetzen, ohne daß die Bedeutung des Ausdruckes im Ganzen sich ändert, also z. B. für $a + b + (-c) + (-d) + e + (-f)$ auch schreiben $a + (b + (-c)) + ((-d) + e) + (-f)$, oder $((-d) + b) + (e + (-c) + a) + (-f)$ u. s. f. (da ja nach § 16, 4 $(-a) + b = b - a = b + (-a)$ ist).

3. Uebrigens kann man dann auch die Klammern, in welche die negativen Summanden eingeschlossen sind, nach § 16, 4 wieder beseitigen und z. B. für den zuletzt erwähnten Ausdruck schreiben $-d + b + e - c + a - f$. Vergleicht man dies mit dem ursprünglichen Ausdrucke $a + b - c - d + e - f$, so erhellt, daß die willkürliche Versetzbarkeit der Glieder auch bei Ausdrücken solcher Art stattfindet, wo außer dem Additionszeichen das Subtraktionszeichen zwischen den Gliedern vorkommt; so daß man auch hier jedes Glied sammt seinem Vorzeichen, ohne dieses ändern zu müssen, an jede beliebige Stelle bringen kann (anders verhält sich's aber hinsichtlich der Zeichenänderung, wenn man bei dergleichen Ausdrücken Klammern anbringen will, s. oben unter N. 1). Soll das erste Glied, das kein Vorzeichen hat, an eine andre Stelle gebracht werden, so ist ihm natürlich + vorzusetzen; umgekehrt bleibt, wenn ein Glied, vor dem das + steht, an die erste Stelle versetzt wird, das + weg.

4. Demnach kann man für $a + b - c - d + e - f$ auch setzen $a + b + e - c - d - f$, was nach § 13, 1 $= (a + b + e) - (c + d + f)$ sein muß. Ebenso läßt sich jeder ähnliche Ausdruck in eine Differenz gleichartiger Summen verwandeln. Und da nach N. 2 jeder solche Ausdruck sich in eine gemischte mehrgliedrige Summe ver-

wandeln läßt, so kann man ihn selbst schon so nennen und daher sagen: jede gemischte mehrgliedrige Summe läßt sich in eine Differenz gleichartiger Summen umformen.

§ 18.

1. Wenn behauptet wird, die negativen Zahlen seien kleiner als Null, so kann dies jedenfalls nicht im Sinne von § 9, 1 verstanden werden, da diese Ausdrücke keine Glieder der Zahlenreihe vorstellen und vor Null kein Glied der Zahlenreihe mehr vorhergeht. Insofern aber nicht $-b = 0$ sein kann, weil dann (§ 10, 1) auch $(-b) + b = 0 + b$ d. h. $0 = b$ wäre, ferner auch nicht $-b > 0$ sein kann, weil dann (§ 10, 3) auch $(-b) + b > 0 + b$ d. h. $0 > b$ wäre, läßt sich diese Behauptung wohl rechtfertigen, da hienach nur übrig bleibt, daß $-b < 0$, was auch damit übereinstimmt, daß $(-b) + b < 0 + b$ d. h. $0 < b$ ist (vgl. § 10, 4).

2. Auf ähnliche Weise rechtfertigt sich der Satz, daß die negativen Zahlen desto kleiner seien, je größer sie, als positiv betrachtet, sind; daß z. B. $-3 < -2$ sei, weil $3 > 2$. Da nämlich nicht $-(b + c) = -b$ sein kann, weil dann auch $-(b + c) + (b + c) = -b + (b + c)$ d. h. $0 = c$ wäre, ferner auch nicht $-(b + c) > -b$ sein kann, weil dann auch $-(b + c) + (b + c) > -b + (b + c)$ d. h. $0 > c$ wäre, so bleibt nur übrig, daß $-(b + c) < -b$, was auch damit stimmt, daß $-(b + c) + (b + c) < -b + (b + c)$ d. h. $0 < c$ ist.

§ 19.

1. Gleiches von Gleichem subtrahirt giebt Gleiches. Ist $a = b$, so muß auch $a - c = b - c$ sein; ebenso $c - a = c - b$ (vgl. § 5, 4).

2. Umgekehrt: wenn $a - c = b - c$, so ist (§ 10, 1) auch $(a - c) + c = (b - c) + c$ d. h. $a = b$. Ferner: wenn $c - a = c - b$, so folgt aus $(c - a) + a = (c - b) + b$ nach § 10, 2, daß $a = b$.

3. Ist $a > b$, so ist auch $a - c > b - c$. Denn wäre $a - c = b - c$, so müßte auch $a = b$ sein (N. 2); oder wäre $a - c < b - c$, so müßte nach § 10, 3 $(a - c) + c < (b - c) + c$ d. h. $a < b$ sein.

4. Ist $b > c$, so ist $a - b < a - c$. Denn wäre $a - b = a - c$, so müßte nach N. 2 $b = c$ sein. Oder wäre $a - b > a - c$, so müßte nach § 10, 3 auch $(a - b) + (b + c) > (a - c) + (b + c)$ oder $((a - b) + b) + c > ((a - c) + c) + b$ d. h. $a + c > a + b$, also (§ 10, 4) $b < c$ sein.

Viertes Kapitel. Multiplikation.

§ 20.

1. Eine dritte Rechnungsart ist die Multiplikation. Eine Zahl a mit einer andren b multipliciren (vervielfachen) heißt: aus a und b eine Zahl ableiten, die eine Summe von so vielen Summanden, deren jeder = a, ist als b Einheiten enthält. Diese Summe nennt man ein Vielfaches und namentlich das b-fache von a und bezeichnet sie mit Rücksicht auf ihre Entstehung aus a und b durch $a \times b$ oder $a \cdot b$ oder mittels bloßer Nebeneinanderstellung von a und b ohne das Multiplikationszeichen ($\times$ oder $\cdot$) durch $a\,b$ (sprich: a mal b). Die Zahl a nennt man den Multiplikanden, die Zahl b den Multiplikator.

2. Das b-fache von a ist eins mit dem a-fachen von b; in Zeichen:

$$a \times b = b \times a.$$

Denn nach Obigem ist $a \times b$ eine Summe $a + a + a + \ldots$ von b Summanden, deren jeder a Einheiten enthält oder eine Summe von a Einheiten ist, welche man als erste, zweite, dritte .... ate Einheit unterscheiden kann; denkt man sich nun nach § 8, 2 zunächst die ersten, dann die zweiten, dann die dritten u. s. f., endlich die aten Einheiten aller b Summanden zusammengestellt, so machen die ersten Einheiten aller b Summanden zusammen die Zahl b aus, ebenso die zweiten, die dritten, die aten Einheiten; man erhält also a Einheitensummen, von denen jede = b ist, und kann somit die aus b Summanden, deren jeder = a, bestehende Summe auch betrachten als eine Summe von a Summanden, deren jeder = b, d. h. als das a-fache von b, als $b \times a$.

3. Mit Rücksicht hierauf nennt man sowohl den Multiplikanden a als den Multiplikator b mit gemeinschaftlichem Namen einen Faktor des Produktes $a \times b$ oder $b \times a$, spricht auch, statt vom Multipliciren einer Zahl a mit einer andren b, vom Multipliciren zweier Zahlen a und b mit einander.

4. An die Stelle des Multiplikanden kann auch die Eins treten; das a-fache der Einheit (eine Summe von so vielen Summanden, deren jeder = 1, als die Zahl a Einheiten enthält) kann aber natürlich nichts Andres sein als die Zahl a, der Multiplikator, selbst. Ferner kann auch die Null an die Stelle des Multiplikanden treten; es ist aber das a-fache der Null (eine Summe von a Summanden, deren jeder = 0) nothwendig wieder = 0 (vgl. § 6).

5. Tritt Eins an die Stelle des Multiplikators, so hat man freilich nicht mehr, dem Begriffe der Multiplikation genau entsprechend, eine Summe gleicher Summanden vor sich; vielmehr hat ein solcher Ausdruck nur die Form eines Vielfachen; übrigens ist er in jedem Falle gleich dem Multiplikanden. Denn denkt man sich alle

möglichen Vielfachen von a, vom Zweifachen an, in eine Reihe gestellt:

$$a + a,\ a + a + a,\ a + a + a + a \ldots\ldots$$
$$\text{oder } a . 2,\quad a . 3,\quad a . 4,\quad \ldots\ldots,$$

so entsteht jedes Reihenglied aus dem nächstvorhergehenden durch Addition von a, wobei der Multiplikator um 1 größer wird; umgekehrt kann man aus jedem Reihenglied das nächstvorhergehende durch Subtraktion von a erzeugen, wobei der Multiplikator um 1 kleiner wird; verfährt man nun ebenso mit $a + a = a . 2$, so ergiebt sich $a = a . 1$; es ist also das Einfache jeder Zahl dieser Zahl selbst gleich. Geht man nun noch einen Schritt weiter, so ergiebt sich $a - a = a . 0$ oder $0 = a . 0$; es ist also das Nullfache jeder Zahl selbst gleich Null.

6. Somit läßt Eins als Faktor in jedem Falle den andren Faktor ungeändert; es ist $1 . a = a . 1 = a$; man kann daher auch jede Zahl in der Form eines Produktes aus ihr selbst und der Eins darstellen. Dagegen macht Null als Faktor in jedem Falle das Produkt gleich Null; es ist $0 . a = a . 0 = 0$. Endlich ist hienach auch $0 . 0 = 0$.

§ 21.

1. Der Multiplikand kann auch in der Form einer Summe (zunächst von zwei Summanden) gegeben sein. Eine Summe $a + b$ mit einer Zahl c multipliciren ist aber so viel als die einzelnen Summanden mit dieser Zahl multipliciren und die Produkte addiren; es ist

$$(a + b) . c = a . c + b . c .$$

Denn nach dem Begriffe der Multiplikation ist $(a + b) . c$ eine Summe von c Summanden, deren jeder $= a + b$; denkt man sich nun nach § 8, 2 zunächst alle a zu einander und hiezu die Summe aller b addirt, so erhellt, daß $(a + b) . c$ auch gleich ist einer Summe von c Summanden, deren jeder $= a$, vermehrt um eine Summe von c Summanden, deren jeder $= b$, d. h. $= a . c + b . c$.

2. Umgekehrt muß also auch

$$a . c + b . c = (a + b) . c$$

sein, d. h. die Summe zweier Produkte, welche den Multiplikator gemein haben, ist gleich der Summe der Multiplikanden, multiplicirt mit dem gemeinschaftlichen Multiplikator.

3. Wo neben dem Multiplikationszeichen auch das Additions- oder Subtraktionszeichen vorkommt, werden diejenigen Ausdrücke, zwischen welchen das Multiplikationszeichen steht, wie z. B. hier a und c und b und c, als unmittelbar zusammengehörig betrachtet, so lange nicht durch Klammern etwas Andres angedeutet wird; ebendarum dürfen auf der andren Seite der Gleichung die Klammern nicht fehlen, da $a + b . c$ vielmehr die Summe von a und von $b . c$ vorstellen würde.

§ 22.

1. Auch der Multiplikator kann in der Form einer Summe gegeben sein. Eine Zahl a mit einer Summe $b + c$ multipliciren ist aber

so viel als sie mit den einzelnen Summanden multipliciren und die Produkte addiren; es ist

$$a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c \,.$$

Denn es ist $a \,.\, (b + c)$ eine Summe von $b + c$ Summanden, deren jeder $= a$; denkt man sich nun (vgl. § 8, 2) erst b von diesen Summanden zu einander addirt und hiezu die Summe der c übrigen Summanden, so erhellt, daß die erste Summe $= a \,.\, b$ und die zweite $= a \,.\, c$, somit $a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$ ist.

2. Umgekehrt muß also auch

$$a \,.\, b + a \,.\, c = a \,.\, (b + c)$$

sein, d. h. die Summe zweier Produkte, die den Multiplikanden gemein haben, ist gleich diesem gemeinsamen Faktor, multiplicirt mit der Summe der Multiplikatoren.

§ 23.

1. Der Multiplikand kann ferner in der Form einer Differenz gegeben sein. Eine Differenz $a - b$ mit einer Zahl c multipliciren ist aber so viel als den Minuenden und den Subtrahenden mit dieser Zahl multipliciren und letzteres Produkt vom ersteren subtrahiren; es ist

$$(a - b) \,.\, c = a \,.\, c - b \,.\, c \,.$$

Denn nach § 21, 2 ist $(a - b) \,.\, c + b \,.\, c = ((a - b) + b) \,.\, c = a \,.\, c$; ferner ist $(a \,.\, c - b \,.\, c) + b \,.\, c = a \,.\, c$; da also $(a - b) \,.\, c + b \,.\, c = (a \,.\, c - b \,.\, c) + b \,.\, c$, so muß auch $(a - b) \,.\, c = a \,.\, c - b \,.\, c$ sein.

2. Umgekehrt ist also nothwendig auch

$$a \,.\, c - b \,.\, c = (a - b) \,.\, c,$$

d. h. anstatt von einem Produkte ein andres mit demselben Multiplikator zu subtrahiren, kann man vom Multiplikanden des ersten Produktes den des zweiten subtrahiren und die Differenz mit dem gemeinsamen Multiplikator multipliciren.

§ 24.

1. Auch der Multiplikator kann in der Form einer Differenz gegeben sein. Eine Zahl a mit einer Differenz $b - c$ multipliciren ist aber so viel als jene Zahl mit dem Minuenden und mit dem Subtrahenden multipliciren und letzteres Produkt vom ersteren subtrahiren; es ist

$$a \,.\, (b - c) = a \,.\, b - a \,.\, c \,.$$

Denn nach § 22, 2 ist $a \,.\, (b - c) + a \,.\, c = a \,.\, ((b - c) + c) = a \,.\, b$; andrerseits ist $(a \,.\, b - a \,.\, c) + a \,.\, c = a \,.\, b$; da somit $a \,.\, (b - c) + a \,.\, c = (a \,.\, b - a \,.\, c) + a \,.\, c$, so muß auch $a \,.\, (b - c) = a \,.\, b - a \,.\, c$ sein.

2. Umgekehrt muß also auch

$$a \,.\, b - a \,.\, c = a \,.\, (b - c)$$

sein, d. h. anstatt von einem Produkte ein andres mit demselben Multiplikanden zu subtrahiren, kann man vom Multiplikator des ersten den des zweiten subtrahiren und mit dieser Differenz den gemeinschaftlichen Multiplikanden multipliciren.

§ 25.

1. Nach § 21, 1; 22, 1; 23, 1; 24, 1 und § 20, 4—6 ist

$$(a + 1) . b = a . b + 1 . b = a . b + b;$$
$$a . (b + 1) = a . b + a . 1 = a . b + a;$$
$$(a - 1) . b = a . b - 1 . b = a . b - b;$$
$$a . (b - 1) = a . b - a . 1 = a . b - a.$$

2. Nach § 20, 4—6 und § 21, 2; 22, 2; 23, 2; 24, 2 ist umgekehrt

$$a . b + b = a . b + 1 . b = (a + 1) . b;$$
$$a . b + a = a . b + a . 1 = a . (b + 1);$$
$$a . b - b = a . b - 1 . b = (a - 1) . b;$$
$$a . b - a = a . b - a . 1 = a . (b - 1).$$

Somit ist, wie man sagt, ein Zusammenfassen (Zusammenziehen) zu einem Produkte mittels Absonderung des gemeinsamen Faktors auch dann möglich, wenn nicht zwei Produkte mit gemeinsamem Faktor, sondern bloß eine Zahl und ein Produkt, worin sie als Faktor enthalten ist, zu einander addirt oder von einander subtrahirt werden sollen.

§ 26.

1. Es ist immer

$$(-a) . b = -a . b,$$

weil $(-a) . b = (0 - a) . b = 0 . b - a . b = 0 - a . b = -a . b$ (vgl. § 23, 1 und 20, 4 und 6).

2. Auch ist allgemein

$$a . (-b) = -a . b,$$

weil $a . (-b) = a . (0 - b) = a . 0 - a . b = 0 - a . b = -a . b$ (vgl. § 24, 1 und 20, 5 und 6).

3. Dagegen ist

$$(-a) . (-b) = +a . b = a . b,$$

weil $(-a) . (-b) = (0 - a) . (0 - b) = 0 . (0 - b) - a . (0 - b) = (0 . 0 - 0 . b) - (a . 0 - a . b) = (0 - 0) - (0 - a . b) = 0 - (0 - a . b) = (0 - 0) + a . b = 0 + a . b = a . b$ (vgl. § 11, 4).

§ 27.

1. Sowohl der Multiplikand als der Multiplikator kann auch eine mehrgliedrige gleichartige oder gemischte Summe sein; in allen solchen Fällen hat man nur nach dem Bisherigen zu verfahren, wenn man den in Form eines Produktes gegebenen Ausdruck zu einer mehrgliedrigen gleichartigen oder gemischten Summe von Produkten entwickeln will, wie in § 21, 1; 22, 1; 23, 1; 24, 1 Produkte zu einfachen Produktensummen und Produktendifferenzen entwickelt wurden. So ist z. B. $(a + b - c) . (d - e + f) = a . (d - e + f) + b . (d - e + f) - c . (d - e + f) = (a . d - a . e + a . f) + (b . d - b . e + b . f) - (c . d - c . e + c . f) = a . d - a . e + a . f + b . d - b . e + b . f - c . d + c . e - c . f$. Zunächst ist

nämlich $(a + b - c) . (d - e + f) = ((a + b) - c) . ((d - e) + f) = (a + b) . ((d - e) + f) - c . ((d - e) + f)$ u. s. w.

2. Ebenso hat man nur die bisherigen Regeln zu befolgen, wenn man eine mehrgliedrige gleichartige oder gemischte Summe von Produkten durch Absonderung des gemeinsamen Faktors oder der gemeinsamen Faktoren in ein Produkt umformen will. Es ist z. B. $a . b - a . c + a . d - b . e + c . e - d . e + b . f - c . f + d . f = a . (b - c + d) - (b - c + d) . e + (b - c + d) . f = (a - e + f) \times (b - c + d)$.

§ 28.

1. Der Multiplikand kann auch selbst schon in der Form eines Produktes gegeben sein. Ein Produkt $a . b$ mit einer Zahl c multipliciren ist aber so viel als den Multiplikanden a mit dieser Zahl c multipliciren und dieses Produkt mit dem Multiplikator b, oder auch so viel als den Multiplikator b mit c multipliciren und mit diesem Produkte den Multiplikanden a; in Zeichen:

$$(a . b) . c = (a . c) . b = a . (b . c) .$$

Denn es ist $(a . b) . c$ eine Summe von c Summanden, deren jeder $= a . b$; insofern nun alle Glieder dieser Produktensumme den Faktor b gemein haben, ist sie nach § 21, 2 und 27, 2 gleich einer Summe von c Summanden, deren jeder $= a$, multiplicirt mit b, also $= (a . c) . b$; insofern aber alle Glieder derselben Produktensumme den Faktor a gemein haben, ist sie nach § 22, 2 und 27, 2 auch $= a$, multiplicirt mit einer Summe von c Summanden, deren jeder $= b$, also $= a . (b . c)$

2. Hienach muß umgekehrt auch

$$a . (b . c) = (a . b) . c = (a . c) . b$$

sein, d. h. wenn der Multiplikator schon die Form eines Produktes hat, wenn man also eine Zahl a mit einem Produkte $b . c$ multipliciren soll, so kann man sie auch erst mit dem Multiplikanden oder mit dem Multiplikator dieses Produktes multipliciren und dann das sich ergebende Produkt mit dem andren Faktor des als Multiplikator gegebenen Produktes.

§ 29.

1. In § 28 war bereits von Produkten dreier Faktoren die Rede; es giebt aber auch Produkte von mehr als drei Faktoren, da z. B. in $(a . b) . c$ sowohl das a als das b als das c selbst wieder ein Produkt sein kann. Solche Produkte von drei oder mehr Faktoren können, ohne daß sich der Werth oder die Bedeutung des ganzen Ausdruckes ändert, ohne alle Klammern geschrieben werden; da z. B. $a . b . c$, man mag dies nun, wie gewöhnlich, so verstehn: $(a . b) . c$ oder so: $a . (b . c)$, immer dasselbe bedeutet; nur dann sind Klammern erforderlich, wenn man bestimmt andeuten will, daß man sich die in sie einzuschließenden Faktoren zunächst mit einander und erst ihr Produkt mit den übrigen Faktoren multiplicirt denkt. Umgekehrt kann man bei einem Ausdrucke wie z. B. $a . b . c . d . e$, der sonst gewöhn-

lich so verstanden wird: $(((a . b) . c) . d) . e$, beliebig Klammern anbringen, z. B. auch schreiben $(a . ((b . c) . d)) . e$ oder $a . (b . ((c . d) . e))$ u. s. f. Auch kann man bei solchen Ausdrücken die einzelnen Faktoren beliebig versetzen, da z. B. $a . b . c$ nach § 28 auch $= a . c . b$, vgl. § 20, 2.

2. Wie nach § 21—24 und 27 jeder Faktor eines Produktes zweier Faktoren eine Summe oder Differenz oder mehrgliedrige gleichartige oder gemischte Summe sein kann, so findet dies auch bei Produkten mehrerer Faktoren statt. Daß jeder solche Faktor für sich in Klammern einzuschließen ist, erhellt aus § 21, 3. Will man diese Klammern beseitigen, so hat man die einzelnen Produkte nach § 21 ff. zu entwickeln.

§ 30.

Ein Produkt ist größer als jeder seiner Faktoren, sofern sie sämmtlich Zahlen im eigentlichsten Sinne des Wortes, also selbst die Eins ausgeschlossen (§ 3, 2), sind. Denn nach § 9, 2 ist dann nothwendig $a . b$, als eine Summe von b Faktoren, deren jeder $= a$ ist, $> a$ und als eine Summe von a Faktoren, deren jeder $= b$ ist, $> b$. Daß und inwiefern aber dieser Satz nicht mehr unbedingt gilt, sobald einer der Faktoren 1 oder 0 oder eine negative Zahl ist, ergiebt sich leicht aus § 20, 4—6 und 26, in Verbindung mit 19.

§ 31.

1. Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt Gleiches. Ist $a = b$, so ist auch $a . c = b . c$ (vgl. § 5, 4).

2. Umgekehrt läßt sich aus $a . c = b . c$ schließen, daß $a = b$ (so lange nicht $c = 0$, vgl. § 20, 6), oder wenn zwei gleiche Produkte den einen Faktor gemein haben, so müssen die zwei andren Faktoren einander gleich sein.

3. Ist aber $a > b$, so ist $a . c > b . c$, (sofern nicht $c = 0$). Denn setzt man $a = b + d$, so ist $a . c = (b + d) . c = b . c + d . c$, also $> b . c$.

4. Umgekehrt: wenn $a . c > b . c$, so muß $a > b$ sein. Denn wäre $a = b$, so würde (N. 1) $a . c = b . c$ sein; oder wäre $a < b$, so wäre (N. 3) $a . c < b . c$.

Fünftes Kapitel. Division.

§ 32.

1. Eine vierte Rechnungsart ist die Division. Eine Zahl a durch eine andre (oder mit einer andren) b dividiren heißt: aus diesen beiden Zahlen eine dritte herleiten, welche, mit b multiplicirt, a giebt. Die Zahl a wird der Dividend, die Zahl b der Divisor,

die zu findende dritte Zahl der Quotient genannt. Das Zeichen der Division ist entweder ein Querstrich oder ein Doppelpunkt; wählt man jenen, so wird der Dividend oberhalb, der Divisor unterhalb desselben geschrieben; im letzteren Falle geht der Ausdruck des Dividenden dem Divisionszeichen voran und der Ausdruck des Divisors folgt; so daß $\frac{a}{b}$ oder a : b (sprich: a durch b) den Quotienten, das Ergebniß der Division von a durch b andeutet.

2. Hienach ist allgemein

$$\frac{a}{b} . b \text{ oder } (a : b) . b = a;$$

ferner

$$\frac{a . b}{b} \text{ oder } (a . b) : b = a \text{ und } \frac{a . b}{a} \text{ oder } (a . b) : a = b,$$

d. h. wenn man ein Produkt mit einem seiner Faktoren dividirt, so ergiebt sich der andre Faktor.

3. In dergleichen Fällen, wo neben dem Divisionszeichen auch das Multiplikationszeichen vorkommt, dürfen bei der Wahl des Doppelpunktes die Klammern nicht fehlen, um das zunächst Zusammengehörige zu bezeichnen, während der Querstrich sie entbehrlich macht.

4. Ein Ausdruck, welcher die Form eines Quotienten, aber 1 zum Divisor hat, ist seiner Bedeutung nach vom Dividenden nicht verschieden; es ist immer

$$\frac{a}{1} = a .$$

Denn nach dem Begriffe der Division muß $\frac{a}{1} . 1 = a$ sein; andrerseits ist $a . 1 = a$ (§ 20, 5), woraus nach § 31, 2 folgt $\frac{a}{1} = a$.

5. Somit ist $1 . a = a . 1 = \frac{a}{1}$.

6. Ein Ausdruck, der die Form eines Quotienten hat, dessen Dividend aber Null ist, ist selbst = 0; in Zeichen:

$$\frac{0}{a} = 0.$$

Denn einerseits muß $\frac{0}{a} . a = 0$ sein, andrerseits ist $0 . a = 0$, also $\frac{0}{a} . a = 0 . a$, mithin $\frac{0}{a} = 0$; übrigens ist hienach auch $0 . a = a . 0 = \frac{0}{a}$.

7. Wenn aber an der Stelle des Divisors Null steht, so bedeutet ein solcher formeller Quotient, wie $\frac{a}{0}$, weder an sich irgend eine Zahl, noch kann er in Verbindung mit andren Ausdrücken nach den

Gesetzen des Rechnens mit Quotienten behandelt zu einem Ergebnisse führen, dem wirkliche Bedeutung zukäme. Denn nach diesen Gesetzen müßte erstens $\frac{a}{0} \cdot 0 = a$ sein, zweitens müßte aber auch $\frac{a}{0} \cdot 0 = 0$ sein (§ 20, 5 und 6), folglich in jedem Falle $a = 0$, gleichviel, welchen Werth man für a annehmen möchte.

8. Endlich ist der formelle Quotient $\frac{0}{0}$ ein Ausdruck von völlig unbestimmter Bedeutung. Denn setzt man $\frac{0}{0} = \frac{0 \cdot a}{0}$ oder $= \frac{a \cdot 0}{0}$, was nach § 20, 6 geschehen darf, so muß (N. 2) $\frac{0}{0} = a$ sein, was man auch unter a verstehn möge; also kann man dem $\frac{0}{0}$ jeden beliebigen Werth beilegen, auch den Werth 0, da $0 \cdot 0$ ebenfalls $= 0$ ist und $\frac{0 \cdot 0}{0} = 0$ sein muß.

§ 33.

1. Der Dividend kann auch in der Form einer Summe gegeben sein. Dann ist der Quotient gleich der Summe der Quotienten, welche sich ergeben, wenn man die einzelnen Summanden durch den Divisor dividirt; es ist immer

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Denn einerseits muß $\frac{a+b}{c} \cdot c = a + b$ sein; andrerseits ist nach § 21, 1 $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) \cdot c = \frac{a}{c} \cdot c + \frac{b}{c} \cdot c = a + b$, also $\frac{a+b}{c} \cdot c = \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) \cdot c$, mithin (§ 31, 2) $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.

2. Umgekehrt ist also nothwendig auch

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c},$$

d. h. die Summe zweier Quotienten mit gleichem Divisor ist gleich der durch letzteren dividirten Summe der Dividenden.

3. Wollte man sich zur Darstellung dieser Sätze des zweiten Divisionszeichens, des Doppelpunktes, bedienen, so müßte man schreiben $(a + b) : c = a : c + b : c$. Wenn nämlich neben dem Doppelpunkt als Divisionszeichen auch das Additions- oder Subtraktionszeichen vorkommt, so werden (vgl. § 21, 3) diejenigen Ausdrücke, zwischen denen das Divisionszeichen steht, als unmittelbar zusammengehörig betrachtet; so daß z. B. $a + b : c$ so verstanden werden würde: a, ver-

mehrt um den Quotienten b : c. Der Querstrich als Divisionszeichen macht auch hier (vgl. § 32, 3) die Klammern entbehrlich.

§ 34.

1. Der Dividend kann auch in der Form einer Differenz gegeben sein. Dann ist der Quotient gleich der Differenz zwischen dem durch den Divisor dividirten Minuenden und dem durch den Divisor dividirten Subtrahenden; in Zeichen:

$$\frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

Denn es ist einerseits $\frac{a - b}{c} \, . \, c = a - b$, andrerseits nach § 23, 1 $\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right) . \, c = \frac{a}{c} \, . \, c - \frac{b}{c} \, . \, c = a - b$, also $\frac{a - b}{c} \, . \, c = \left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right) . \, c$ und $\frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$.

Oder: es ist einerseits $\frac{a - b}{c} + \frac{b}{c} = \frac{(a - b) + b}{c} = \frac{a}{c}$ (§ 33, 2 und 11, 2), andrerseits auch $\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right) + \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$, folglich (§ 10, 2) $\frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$.

2. Umgekehrt muß also auch

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$$

sein, d. h. die Differenz zweier Quotienten von gleichem Divisor ergiebt sich auch, wenn man vom Dividenden des als Minuend gegebenen Quotienten den Dividenden des als Subtrahend gegebenen subtrahirt und diese Differenz mit dem gemeinsamen Divisor dividirt.

3. Da nach § 32, 2 jeder beliebige Ausdruck a auch in der Form $\frac{a \, . \, b}{b}$ oder $\frac{b \, . \, a}{b}$ dargestellt werden kann, so ist nach § 33, 2 und vorstehender Nr. 2

$$a + \frac{b}{c} = \frac{a \, . \, c}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a \, . \, c + b}{c},$$

$$\frac{a}{b} + c = \frac{a}{b} + \frac{b \, . \, c}{b} = \frac{a + b \, . \, c}{b};$$

$$a - \frac{b}{c} = \frac{a \, . \, c}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a \, . \, c - b}{c},$$

$$\frac{a}{b} - c = \frac{a}{b} - \frac{b \, . \, c}{b} = \frac{a - b \, . \, c}{b}.$$

Hienach läßt sich die Summe oder die Differenz eines beliebigen Ausdruckes und eines Quotienten zu einem Quotienten mit demselben Divisor vereinigen.

§ 35.

1. Es ist allgemein

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b},$$

weil $\frac{-a}{b} = \frac{0-a}{b} = \frac{0}{b} - \frac{a}{b} = 0 - \frac{a}{b} = -\frac{a}{b}$ (§ 34, 1 und 32, 6); oder nach § 31, 2, weil einerseits $\frac{-a}{b} . b =$ $-a$, andrerseits (§ 26, 1) auch $\left(-\frac{a}{b}\right) . b = -\frac{a}{b} . b = -a$.

2. Ebenso ist immer

$$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b},$$

weil $\frac{a}{-b} . (-b) = a$ sein muß und auch $\left(-\frac{a}{b}\right) . (-b) =$ $\frac{a}{b} . b = a$ (§ 26, 3), also $\frac{a}{-b} . (-b) = \left(-\frac{a}{b}\right) . (-b)$ ist; und es ist mithin auch

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

3. Dagegen ist

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b},$$

weil $\frac{-a}{-b} . (-b) = -a$ sein muß und $\frac{a}{b} . (-b) = -\frac{a}{b} . b$ $= -a$ (nach § 26, 2), also $\frac{-a}{-b} . (-b) = \frac{a}{b} . (-b)$ ist.

§ 36.

1. Wenn eine mehrgliedrige gleichartige oder gemischte Summe als Dividend gegeben ist, so kann der Quotient ebenfalls nach § 33, 1; 34, 1 und 35 sofort zu einer mehrgliedrigen Summe von Quotienten mit gleichem Divisor entwickelt werden, da z. B. $\frac{a+b-c}{d} =$ $\frac{(a+b)-c}{d} = \frac{a+b}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d}$.

2. Umgekehrt: wenn Quotienten mit gleichem Divisor bloß unter einander oder mit beliebigen andern Ausdrücken zu einer mehrgliedrigen gleichartigen oder gemischten Summe verbunden sind, (und ebenso, wenn unter den Gliedern einer solchen Summe auch nur ein einziger Quotient vorkommen sollte,) so kann man den Gesammtausdruck sofort nach § 33, 2; 34, 2 und 3 und 35 zu einem Quotienten umformen.

§ 37.

1. Der Dividend kann ferner in der Form eines Produktes gegeben sein. Dann kann man den Quotienten auch erhalten, indem man den ersten oder zweiten Faktor dieses Produktes mit dem Divisor dividirt und diesen Quotienten bezüglich mit dem zweiten oder ersten Faktor multiplicirt; es ist immer

$$\frac{a\,.\,b}{c} = \frac{a}{c}\,.\,b = a\,.\,\frac{b}{c}\,.$$

Denn erstens ist $\frac{a\,.\,b}{c}\,.\,c = a\,.\,b$, zweitens $\left(\frac{a}{c}\,.\,b\right).\,c = \left(\frac{a}{c}\,.\,c\right).\,b = a\,.\,b$ (§ 28, 1), drittens $\left(a\,.\,\frac{b}{c}\right).\,c = a\,.\left(\frac{b}{c}\,.\,c\right) = a\,.\,b$, also $\frac{a\,.\,b}{c}\,.\,c = \left(\frac{a}{c}\,.\,b\right).\,c = \left(a\,.\,\frac{b}{c}\right).\,c$, mithin (§ 31, 2) u. s. w.

2. Umgekehrt muß also auch

$$a\,.\,\frac{b}{c} = \frac{a\,.\,b}{c} = \frac{a}{c}\,.\,b$$

sein, d. h. wenn eine Zahl mit einem Quotienten zu multipliciren ist, so kann man sie auch mit dem Dividenden multipliciren und dies Produkt mit dem Divisor dividiren, oder man kann sie auch mit dem Divisor dividiren und diesen neuen Quotienten mit dem Dividenden des gegebenen multipliciren.

§ 38.

1. Der Dividend kann auch selbst schon in Form eines Quotienten gegeben sein. Einen Quotienten $\frac{a}{b}$ durch eine Zahl c dividiren ist aber so viel als den Dividenden a durch diese Zahl c dividiren und diesen neuen Quotienten durch den Divisor b, oder auch so viel als den Dividenden a durch das Produkt der Divisoren b und c dividiren; in Zeichen:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b} = \frac{a}{b\,.\,c}\,.$$

Denn es ist erstens $\left(\frac{a}{b} : c\right).\,(b\,.\,c) = \left(\left(\frac{a}{b} : c\right).\,c\right).\,b = a$ (§ 28, 2), zweitens $\frac{a : c}{b}\,.\,(b\,.\,c) = \left(\frac{a : c}{b}\,.\,b\right).\,c = a$, drittens $\frac{a}{b\,.\,c}\,.\,(b\,.\,c) = a$, folglich (§ 31, 2) u. s. w.

2. Umgekehrt ist also nothwendig auch

$$\frac{a}{b\,.\,c} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b,$$

d. h. wenn der Divisor in Form eines Produktes gegeben ist, so ergiebt sich der Quotient, wenn man den Dividenden durch den ersten

oder zweiten Faktor dividirt und diesen Quotienten bezüglich durch den zweiten oder ersten Faktor.

§ 39.

1. Auch der Divisor kann schon in Form eines Quotienten gegeben sein. Eine Zahl a durch einen Quotienten $\frac{b}{c}$ dividiren ist aber so viel als sie durch den Dividenden b dividiren und diesen Quotienten mit dem Divisor c multipliciren, oder auch so viel als sie mit dem Divisor c multipliciren und dies Produkt durch den Dividenden b dividiren; es ist immer

$$\frac{a}{b : c} = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}.$$

Denn es ist erstens $\frac{a}{b : c} \cdot \frac{b}{c} = a$, zweitens $\left(\frac{a}{b} \cdot c\right) \cdot \frac{b}{c} = \left(\left(\frac{a}{b} \cdot c\right) : c\right) . b = a$ (§ 37, 2), drittens $\frac{a \cdot c}{b} \cdot \frac{b}{c} = \left(\frac{a \cdot c}{b} \cdot b\right) : c = a$, folglich (§ 31, 2) u. s. w.

2. Umgekehrt muß also auch

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} = \frac{a}{b : c}$$

sein, d. h. anstatt einen Quotienten $\frac{a}{b}$ mit einer Zahl c zu multipliciren, kann man den Dividenden mit ihr multipliciren und das Produkt durch den Divisor dividiren, oder man kann auch den Divisor b durch c dividiren und durch diesen neuen Quotienten den Dividenden a des gegebenen.

§ 40.

1. Sollen zwei Quotienten mit einander multiplicirt werden, so kann man statt dessen die Dividenden mit einander multipliciren, ebenso die Divisoren, und ersteres Produkt durch letzteres dividiren; in Zeichen:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Denn nach § 37, 2; 39, 2; 38, 1 ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \cdot c\right) : d = \frac{a \cdot c}{b} : d = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

2. Soll ein Quotient $\frac{a}{b}$ durch einen andren $\frac{c}{d}$ dividirt werden, so kann man statt dessen den Dividenden a durch den Dividenden c, den Divisor b durch den Divisor d und ersteren Quotienten durch letzteren dividiren; es ist allgemein

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d}.$$

Denn es ist $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} : c\right) . d = \frac{a : c}{b} . d = \frac{a : c}{b : d}$, § 39, 1; 38, 1; 39, 2.

3. Man kann aber auch den Dividenden a mit dem Divisor d, den Divisor b mit dem Dividenden c multipliciren und ersteres Produkt durch letzteres dividiren; es ist auch

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a . d}{b . c}.$$

Denn es ist $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} . d\right) : c = \frac{a . d}{b} : c = \frac{a . d}{b . c}$, § 39, 1; 39, 2; 38, 1.

4. Nach N. 1 ist auch $\frac{a}{b} . \frac{d}{c} = \frac{a . d}{b . c}$; nennt man daher $\frac{d}{c}$ den umgekehrten Quotienten $\frac{c}{d}$ oder die Umkehrung von $\frac{c}{d}$, so kann man sagen: ein Quotient wird durch einen andren dividirt, wenn man ihn mit der Umkehrung des letzteren multiplicirt.

§ 41.

1. Ein Quotient bleibt ungeändert, wenn man den Dividenden und den Divisor mit einer und derselben Zahl multiplicirt; es ist immer

$$\frac{a}{b} = \frac{a . c}{b . c}.$$

Denn es ist einerseits $\frac{a}{b} . (b . c) = \left(\frac{a}{b} . b\right) . c = a . c$ (§ 28, 2), andrerseits $\frac{a . c}{b . c} . (b . c) = a . c$, mithin (§ 31, 2) u. s. w.

2. Ein Quotient bleibt auch ungeändert, wenn man den Dividenden und den Divisor mit einer und derselben Zahl dividirt; es ist auch

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}.$$

Denn es ist einerseits $\frac{a}{b} . (b : c) = \left(\frac{a}{b} . b\right) : c = a : c$ (§ 37, 2), andrerseits $\frac{a : c}{b : c} . (b : c) = a : c$, mithin (§ 31, 2) u. s. w.

3. Hienach kann man erstens zwei oder mehr Quotienten mit verschiednen Divisoren in Quotienten mit gleichem Divisor verwandeln und dann, wenn diese Quotienten durch Addition oder Subtraktion mit einander verbunden sind, nach § 33—36 weiter verfahren; so z. B. ist

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \,.\, d}{b \,.\, d} + \frac{b \,.\, c}{b \,.\, d} = \frac{a \,.\, d + b \,.\, c}{b \,.\, d}, \text{ oder}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{a \,.\, d \,.\, f}{b \,.\, d \,.\, f} - \frac{b \,.\, c \,.\, f}{b \,.\, d \,.\, f} + \frac{b \,.\, d \,.\, e}{b \,.\, d \,.\, f} = \frac{a \,.\, d \,.\, f - b \,.\, c \,.\, f + b \,.\, d \,.\, e}{b \,.\, d \,.\, f}$$

4. Zweitens kann man nach Obigem einen Quotienten öfters in einfacherer Form darstellen, auf einen einfacheren Ausdruck zurückführen oder reduciren, wenn nämlich Dividend und Divisor Produkte sind, welche einen Faktor gemein haben; dividirt man beide mit diesem gemeinsamen Faktor, so ergiebt sich z. B. $\frac{a \,.\, c}{b \,.\, c} = \frac{(a \,.\, c) : c}{(b \,.\, c) : c} = \frac{a}{b}$.

§ 42.

1. Beim Dividiren wird zunächst vorausgesetzt, daß der Dividend ein Produkt des Divisors und des Quotienten, mithin (§ 30) größer als jeder von diesen sei. Es kommen aber auch Ausdrücke von der Form eines Quotienten vor, dessen Dividend dem Divisor gleich ist. Ein solcher Quotient bedeutet immer die Eins; es ist allgemein

$$\frac{a}{a} = 1,$$

weil $\frac{a}{a} = \frac{1 \,.\, a}{a} = \frac{a \,.\, 1}{a}$, § 20, 4—6, also $= 1$, § 32, 2. Nur der Ausdruck $\frac{0}{0}$ kann zwar auch Eins bedeuten, daneben aber jede andre Bedeutung haben, § 32, 8.

2. Ferner kommen quotientenförmige Ausdrücke vor, deren Dividend, ohne Null zu sein (§ 32, 6), kleiner ist als der Divisor. Solche formelle Quotienten haben zwar an sich eigentlich keine Bedeutung, d. h. sie stellen nicht, wie die wirklichen Quotienten, Glieder der Zahlenreihe vor; indessen können sie, mit andern Ausdrücken nach den für Quotienten geltenden Rechengesetzen verbunden, doch zu Ergebnissen führen, denen wirkliche Bedeutung zukommt.

So z. B. bedeutet $\frac{3}{5}$ an sich eigentlich nichts, d. h. kein Glied der Zahlenreihe; aber $\frac{3}{5} + \frac{7}{5}$ muß nach § 33, 2 so viel als $\frac{3 + 7}{5}$ sein, und dies bedeutet allerdings etwas, nämlich die Zahl 2.

3. Endlich giebt es auch quotientenförmige Ausdrücke, bei denen der Dividend zwar größer als der Divisor, aber kein wirkliches Vielfaches des letztern ist. Es sei nämlich a eine Zahl, die > 1, so ist die Reihe der wirklichen Vielfachen von a mit Einschluß des Einfachen folgende:

$$a \,.\, 1,\quad a \,.\, 2,\quad a \,.\, 3,\quad a \,.\, 4,\quad \ldots$$
$$\text{oder } a,\quad a + a,\quad a + a + a,\quad a + a + a + a,\ \ldots$$

Nun erhellt, daß zwischen a . 1 oder a und a . 2 oder a + a,

ebenso zwischen $a \,.\, 2$ oder $a + a$ und $a \,.\, 3$ oder $a + a + a$ und so fort zwischen je zwei zunächst auf einander folgenden Vielfachen von a jedesmal $a - 1$ Zahlen liegen müssen, die keine Vielfachen von a sind, nämlich zwischen $a \,.\, 1$ oder a und $a \,.\, 2$ oder $a + a$ die Zahlen $a + 1, a + 2, \ldots$ bis $a + (a - 1)$, ebenso zwischen $a \,.\, 2$ oder $a + a$ und $a \,.\, 3$ oder $a + a + a$ die Zahlen $(a + a) + 1$, $(a + a) + 2, \ldots$ bis $(a + a) + (a - 1)$. Ist nun a der Divisor eines Quotienten und eine solche zwischen zwei Vielfachen von a liegende Zahl der Dividend, so kann offenbar der Quotient keine der eigentlichen Zahlen 2, 3, 4 u. s. f. sein, die sich bei der Division der wirklichen Vielfachen von a durch a ergeben, und insofern bedeutet er an sich eigentlich nichts. Gleichwohl kann er, in Verbindung mit andern Ausdrücken nach den Rechengesetzen für Quotienten behandelt, ein Ergebniß liefern, das wirklich etwas bedeutet. So kann z. B. $\frac{7}{5}$ kein Glied der Zahlenreihe vorstellen, da 7 zwischen $5 \,.\, 1$ und $5 \,.\, 2$ liegt; wohl aber ist $\frac{3}{5} + \frac{7}{5} = \frac{3 + 7}{5} = 2$.

4. Die so eben unter N. 2 und 3 besprochnen Ausdrücke, welche das Gemeinsame haben, daß der Dividend kein Vielfaches, auch nicht das Einfache oder Nullfache des Divisors ist, nennt man mit gemeinsamem Namen Brüche, unterscheidet aber die unter N. 2 erörterten als echte Brüche von den unechten unter N. 3. Auch nennt man sie gebrochne Zahlen; da aber hiedurch der Begriff der Zahl abermals eine Erweiterung erfährt (vgl. § 3, 2 und 16, 3), so bezeichnet man zum Unterschiede die eigentlichen Zahlen mit Einschluß der Eins und der Null als ganze. Statt Dividend sagt man hier Zähler und statt Divisor Nenner; auch spricht man den ganzen Ausdruck z. B. $\frac{3}{5}$ nicht sowohl aus: 3 durch 5, als vielmehr: 3 5tel, eigentlich 3 5theil d. h. 3 durch 5 getheilt, dividirt.

5. Die eigentlichen Quotienten, welche ganze Zahlen sind, findet man hin und wieder auch als „uneigentliche Brüche" bezeichnet.

§ 43.

1. Der Nenner eines Bruches kann nicht Eins sein, weil dann nach § 32, 4 der Bruch von seinem Zähler nicht verschieden, d. h. eine ganze Zahl wäre und weil überdies bei einem echten Bruche der Zähler, der nothwendig kleiner als der Nenner ist, nur o sein könnte, vgl. § 42, 2 und 32, 6; noch weniger kann der Nenner eines Bruches Null sein, theils nach § 32, 7, theils weil es für einen echten Bruch dann gar keinen Zähler geben würde. Aber von der ersten eigentlichen Zahl 2 an kann jede eigentliche Zahl n der Nenner eines Bruches sein, und als Zähler kann dann jede Zahl, bei einem echten Bruche von 1 an bis $n - 1$, bei einem unechten von $n + 1$ an bis ins Unendliche, mit Ausnahme der wirklichen Vielfachen von n, angenommen werden. Ist der Zähler 1, so nennt man den Bruch einen Einheitsbruch.

2. Da allgemein $\frac{a}{b} = \frac{1 \cdot a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a = \frac{a \cdot 1}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, § 20, 6 und 37, 1, so kann jeder Quotient, und so auch jeder Bruch, als ein Produkt des Dividenden (Zählers) und eines Einheitsbruches, dessen Nenner der Divisor (Nenner) ist, dargestellt werden. Hienach kann man z. B. dem Wortausdrucke drei Fünftel für $\frac{3}{5}$ (vgl. § 42, 4) auch folgende Deutung geben: Eins durch Fünf getheilt und einen solchen Fünftheil, ein solches Fünftel, dreimal genommen, mit Drei multiplicirt.

3. Bezeichnet n irgend eine eigentliche Zahl von 2 an, m irgend eine Zahl von 1 an, p irgend eine Zahl von 1 bis n — 1, so kann nach § 42, 3 jeder unechte Bruch unter der allgemeinen Form $\frac{n \cdot m + p}{n}$ dargestellt werden. Dies ist aber (§ 33, 1) $= \frac{n \cdot m}{n} + \frac{p}{n} = m + \frac{p}{n}$. Hienach kann jeder unechte Bruch in der Form einer Summe einer ganzen Zahl, m, und eines echten Bruches, $\frac{p}{n}$ (vgl. oben N. 2), dargestellt werden. Die Darstellung des unechten Bruches in dieser Form nennt man das Absondern der Ganzen, den sich ergebenden Ausdruck eine gemischte Zahl; die Zahl p, um welche der Zähler des unechten Bruches das nächstkleinere Vielfache n . m des Nenners n übertrifft, heißt der Rest der Division und der echte Bruch $\frac{p}{n}$ ist der Ergänzungsbruch oder die Ergänzung der ganzen Zahl m zum Werthe des unechten Bruches.

§ 44.

1. Wiewohl übrigens die Brüche, insoferne sie keine Glieder der Zahlenreihe vorstellen, an sich eigentlich bedeutungslose Ausdrücke sind und nur in Verbindung mit andern Ausdrücken bedeutsame Ergebnisse liefern (§ 42, 2 und 3), so lassen sie doch gewissermaßen eine selbständige Auffassung zu, nach welcher sie als eine Art Mittelglieder zwischen den Gliedern der Zahlenreihe betrachtet werden können. Insbesondre ist hienach jeder echte Bruch als eine Art Mittelglied zwischen Null und Eins anzusehen. Denn bezeichnet n irgend eine eigentliche Zahl von 2 an, so kann man alle echten Brüche, welche diese Zahl zum Nenner haben, nach ihren Zählern gemäß der Reihenfolge der Zahlen so ordnen:

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \ldots\ldots \text{ bis } \frac{n-1}{n} \text{ (vgl. § 43, 1).}$$

Jedes Glied dieser Reihe entsteht aus dem nächstvorhergehenden durch Addition und aus dem nächstfolgenden durch Subtraktion des Ein-

heitsbruches $\frac{1}{n}$; denn es ist z. B. (§ 33, 2) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1+1}{n}$ $= \frac{2}{n}$, $\frac{2}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2+1}{n} = \frac{3}{n}$ u. s. f., ebenso (§ 34, 2) $\frac{3}{n} - \frac{1}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$, $\frac{2}{n} - \frac{1}{n} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$. Addirt man nun auch zu $\frac{n-1}{n}$, dem letzten Reihengliede, $\frac{1}{n}$, so erhält man $\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{(n-1)+1}{n} = \frac{n}{n} = 1$; subtrahirt man dagegen auch von $\frac{1}{n}$, dem ersten Reihengliede, $\frac{1}{n}$, so ergiebt sich $\frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1-1}{n} = \frac{o}{n} = o$. Sonach sind o und 1 die Gränzen, zwischen denen die ganze Reihe der echten Brüche, die n zum Nenner haben, eingeschlossen ist. Und da man für n jede Zahl von 2 an nehmen kann, so kann man sagen, daß jeder echte Bruch zwischen o und 1 liege.

2. Ebenso liegt jeder unechte Bruch zwischen zwei zunächst auf einander folgenden Gliedern der Zahlenreihe, nämlich zwischen den zwei Zahlen, welche sich ergeben, wenn man das im Vergleiche mit seinem Zähler nächstkleinere und nächstgrößere Vielfache seines Nenners durch diesen dividirt. Denn bezeichnet man einen unechten Bruch, dessen Nenner n, nach § 43, 3 allgemein mit $\frac{n\,.\,m+p}{n}$, so erhält man, da p jede Zahl von 1 bis n — 1 bedeuten kann, folgende Reihe unechter Brüche:

$$\frac{n\,.\,m+1}{n},\ \frac{n\,.\,m+2}{n},\ \frac{n\,.\,m+3}{n}\ \ldots \text{bis}\ \frac{n\,.\,m+(n-1)}{n};$$

wie nun die ganz ähnliche Reihe unter N. 1 zwischen o und 1 eingeschlossen ist, so diese hier zwischen $\frac{n\,.\,m+1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{(n\,.\,m+1)-1}{n}$ $= \frac{n\,.\,m}{n} = m$ und $\frac{n\,.\,m+(n-1)}{n} + \frac{1}{n} = \frac{n\,.\,m+((n-1)+1)}{n}$ $= \frac{n\,.\,m+n}{n} = \frac{n\,.\,(m+1)}{n} = m+1$, d. h. zwischen den zwei Zahlen, welche sich ergeben, wenn man das im Vergleiche mit n . m + p nächstkleinere und nächstgrößere Vielfache von n, nämlich n . m und n . (m + 1), mit n dividirt.

§ 45.

1. Nach § 44 können die Brüche auch wie die ganzen Zahlen (vgl. § 9) unter einander und mit letzteren verglichen werden, so daß z. B. von den Gliedern der Reihe in § 44, 1 $\frac{3}{n}$, weil auf $\frac{2}{n}$ fol-

gend, $> \frac{2}{n}$ heißen kann und jedes Glied dieser Reihe für $>$ o, aber $<$ 1 anzusehen ist; ferner, daß jeder unechte Bruch $\frac{n \cdot m + p}{n} > m$, aber $< m + 1$ ist. Demgemäß ist von zwei Brüchen mit gleichem Nenner (von zwei gleichbenannten Brüchen) der mit dem größeren Zähler der größere; jeder echte Bruch ist größer als Null, aber kleiner als Eins; jeder unechte Bruch ist größer als die kleinere, aber kleiner als die größere der zwei ganzen Zahlen, zwischen denen er liegt.

2. Wenn zwei Brüche verschiedne Nenner haben, so kann man sie nach § 41 in Brüche mit gleichem Nenner verwandeln, auf einerlei Nenner oder auf gleiche Benennung bringen. So z. B. ist $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7}$ und $\frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 7}$. Da nun $2 \cdot 7 < 3 \cdot 5$, so muß (nach N. 1) $\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} < \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 7}$ d. h. $\frac{2}{3} < \frac{5}{7}$ sein.

3. Hienach ist von zwei Brüchen mit gleichem Zähler der mit dem kleineren Nenner der größere. Denn bedeutet a irgend eine Zahl von 1 an, so ist z. B. $\frac{a}{2}$ nothwendig $> \frac{a}{3}$, weil $\frac{a}{2} = \frac{a \cdot 3}{2 \cdot 3}$, $\frac{a}{3} = \frac{a \cdot 2}{3 \cdot 2}$ und $a \cdot 3 > a \cdot 2$ (§ 31, 3).

4. Namentlich ist also ein Einheitsbruch desto kleiner, je größer sein Nenner ist, und die Einheitsbrüche bilden demzufolge eine Reihe

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots\ldots,$$

deren Glieder immer kleiner werden. Diese Reihe ist natürlich, wie die Reihe der eigentlichen Zahlen, von denen hier eine nach der andern als Nenner auftritt, endlos; man kann keinen Einheitsbruch angeben, welcher der letzte oder kleinste wäre, wie $\frac{1}{2}$ der erste oder größte ist. Weil aber gleichwohl alle Glieder dieser Reihe zwischen 1 und o liegen müssen (§ 44, 1), so kann man sagen, die Null sei die Gränze, welcher sich die Einheitsbrüche vom größten an immer mehr nähern, ohne sie je zu erreichen. (Ueberhaupt nähert sich jeder echte Bruch der Null als einer unerreichbaren Gränze desto mehr, je kleiner er ist.)

5. Dividirt man irgend eine Zahl a nach und nach mit den Gliedern der so eben erwähnten Reihe, so erhält man eine (endlose) Reihe von Quotienten

$$a : \frac{1}{2}, a : \frac{1}{3}, a : \frac{1}{4}, \ldots\ldots,$$

die in der That nichts andres als die eigentlichen Vielfachen von a, nämlich

$$a \cdot 2, a \cdot 3, a \cdot 4, \ldots\ldots,$$

sind, da z. B. $a : \frac{1}{2} = \frac{a}{1} \cdot 2 = a \cdot 2$ oder $= \frac{a \cdot 2}{1} = a \cdot 2$, § 39, 1. Setzt man insbesondre $a = 1$, so erhält man

$$1 \cdot 2,\ 1 \cdot 3,\ 1 \cdot 4, \ldots,$$

d. h. es ergiebt sich die Reihe der eigentlichen Zahlen. In jedem Falle: je kleiner der Einheitsbruch, mit dem man dividirt, desto größer der Quotient. Von diesem Gesichtspunkte aus muß nun nach N. 4 der in § 32, 7 besprochne Ausdruck $\frac{a}{0}$ etwas bedeuten, das größer ist als das Ergebniß der Division von a mit einem noch so kleinen Einheitsbruch, also größer als das größte denkbare Vielfache von a, und insbesondre $\frac{1}{0}$ etwas, das größer ist als die größte denkbare Zahl. Daher sagt man, $\frac{a}{0}$ und insbesondre $\frac{1}{0}$ bedeute das **Unendlichgroße** oder **Unendliche**, wofür man außerdem noch ein eignes Zeichen ∞ angenommen hat.

6. Aus N. 1, verglichen mit § 16, 2 und 3, erhellt, daß auch negative Differenzen, deren Subtrahend ein Bruch ist, namentlich also auch dergleichen Differenzen mit dem Minuenden 0, **negative Brüche** oder **negative gebrochne Zahlen**, vorkommen können.

§ 46.

1. Wenn mehrere Ausdrücke theils durch das Multiplikationszeichen, theils durch das zweite Divisionszeichen, den Doppelpunkt, verbunden und keine Klammern angebracht sind, außer etwa die wegen gleichzeitig vorkommender Additions- oder Subtraktionszeichen unentbehrlichen (vgl. § 21, 3; 33, 3), so wird der Gesammtausdruck so verstanden, daß jeder einzelne Ausdruck nach Andeutung des unmittelbar vor ihm stehenden Zeichens **mit dem Ergebnisse der Verbindung aller vorausgehenden Ausdrücke** zu verbinden sei, so daß z. B.

$$a \cdot (b + c) : d \cdot (e - f) : g$$

so viel ist als $(((a \cdot (b + c)) : d) \cdot (e - f)) : g$.

2. Nach § 43, 2 kann man den Ausdruck $a \cdot (b + c) : d \cdot (e - f) : g$ auch schreiben $a \cdot (b + c) \cdot \frac{1}{d} \cdot (e - f) \cdot \frac{1}{g}$, und in dieser Gestalt läßt er sich wie jedes Produkt mehrerer Faktoren nach § 29, 1 behandeln, d. h. man kann beliebig Klammern anbringen, auch die Faktoren nach Willkür versetzen. Aber in seiner ursprünglichen Form kann man zwar die einzelnen Ausdrücke sammt den vor ihnen stehenden Zeichen ohne Aenderung der letzteren willkürlich versetzen; will man dagegen Klammern anbringen, so wird man öfters nach § 38 und 39 das Multiplikations- in das Divisionszeichen und umgekehrt verwandeln müssen. Denn es ist zwar z. B. $a \cdot b : c = a : c \cdot b$, wenn beide Ausdrücke nach N. 1 verstanden werden (vgl. § 37); aber $a : b \cdot c$ d. h. $(a : b) \cdot c$ ist verschieden von $a : (b \cdot c) = a : b : c$, und

a : b : c d. h. (a : b) : c verschieden von a : (b : c) = a : b . c. Soll der erste einzelne Ausdruck eines solchen Gesammtausdruckes an eine andre Stelle versetzt werden, so ist ihm das Multiplikationszeichen vorzusetzen; will man dagegen einen Einzelausdruck, vor welchem das Divisionszeichen steht, an die erste Stelle bringen, so hat man noch 1 voranzuschicken (da $a : b = a . \frac{1}{b} = \frac{1}{b} . a = 1 : b . a$).

§ 47.

1. Ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist auch $\frac{a + c}{b + d} = \frac{a - c}{b - d} = \frac{c - a}{d - b} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Denn man setze $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = m$, so muß $m . b = a$ und $m . d = c$, also $\frac{a + c}{b + d} = \frac{m . b + m . d}{b + d} = \frac{m . (b + d)}{b + d} = m$, ebenso $\frac{a - c}{b - d} = \frac{m . b - m . d}{b - d} = \frac{m . (b - d)}{b - d} = m$ und $\frac{c - a}{d - b} = \frac{m . d - m . b}{d - b} = \frac{m . (d - b)}{d - b} = m$ sein.

In gleicher Weise ist auch, wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ u. s. f., $\frac{a + c + e}{b + d + f}$ und $\frac{a - c + e}{b - d + f}$ und $\frac{a - c - e}{b - d - f}$ u. s. f. immer $= \frac{a}{b}$.

2. Ist aber $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, so ist $\frac{a}{b} > \frac{a + c}{b + d} > \frac{c}{d}$ (in Worten: $\frac{a + c}{b + d}$ kleiner als $\frac{a}{b}$, aber größer als $\frac{c}{d}$).

Denn man setze $\frac{c}{d} = m$ und (§ 9, 2) $\frac{a}{b} = m + n$, so ist $(m + n) . b = a$, $m . d = c$, $\frac{a + c}{b + d} = \frac{(m + n) . b + m . d}{b + d} = \frac{m . (b + d) + n . b}{b + d} = m + \frac{n . b}{b + d}$, also $\frac{a + c}{b + d} > \frac{c}{d}$, aber $\frac{a}{b} > \frac{a + c}{b + d}$, weil $\frac{a}{b} = m + n = m + \frac{n . (b + d)}{b + d} = m + \frac{n . b}{b + d} + \frac{n . d}{b + d}$.

3. Ferner ist, wenn $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ und $a > c$ und $b > d$,

$\frac{a-c}{b-d} > \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ d. h. $\frac{a-c}{b-d}$ größer als jeder der beiden gegebenen Quotienten. Erstens muß nämlich $\frac{a-c}{b-d} > \frac{c}{d}$ sein; denn wollte man annehmen, es sei $\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$, so müßte nach N. 1 $\frac{(a-c)+c}{(b-d)+d}$ d. h. $\frac{a}{b}$ auch $= \frac{c}{d}$ sein; oder wollte man annehmen, es sei $\frac{a-c}{b-d} < \frac{c}{d}$, so müßte nach N. 2 $\frac{a-c}{b-d} < \frac{(a-c)+c}{(b-d)+d} < \frac{c}{d}$, also $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ sein. Folglich kann nur $\frac{a-c}{b-d} > \frac{c}{d}$ sein; dann ist aber $\frac{a-c}{b-d} > \frac{(a-c)+c}{(b-d)+d} > \frac{c}{d}$ d. h. es ist auch $\frac{a-c}{b-d} > \frac{a}{b}$.

4. Dagegen ist, wenn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ und dabei $a > c$ und $b > d$, $\frac{a-c}{b-d} < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ d. h. $\frac{a-c}{b-d}$ kleiner als jeder der gegebenen Quotienten. Fürs Erste muß nämlich $\frac{a-c}{b-d} < \frac{c}{d}$ sein; denn wollte man annehmen, es sei $\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$, so müßte auch $\frac{(a-c)+c}{(b-d)+d}$ d. h. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sein; oder wollte man annehmen, es sei $\frac{a-c}{b-d} > \frac{c}{d}$, so müßte $\frac{a-c}{b-d} > \frac{(a-c)+c}{(b-d)+d} > \frac{c}{d}$, also $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ sein. Folglich kann nur $\frac{a-c}{b-d} < \frac{c}{d}$ sein; dann ist aber $\frac{a-c}{b-d} < \frac{(a-c)+c}{(b-d)+d} < \frac{c}{d}$, d. h. es ist auch $\frac{a-c}{b-d} < \frac{a}{b}$.

§ 48.

Wenn eine und dieselbe Zahl zum Dividenden und zum Divisor eines Quotienten addirt oder von beiden subtrahirt wird, so ändert sich (vgl. § 41) jedesmal der Werth des Quotienten, wofern dieser nicht etwa die Form $\frac{a}{a}$ hat.

1. Ist $\frac{a}{b}$ ein eigentlicher Quotient (eine ganze Zahl von 2 an) oder ein unechter Bruch, so ist $\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$.

Denn in diesem Falle ist $\frac{a}{b} > \frac{c}{c}$, also nach § 47, 2 $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c} > \frac{c}{c}$.

2. Dagegen ist unter gleicher Voraussetzung $\frac{a-c}{b-c} > \frac{a}{b}$, nach § 47, 3.

3. Ist $\frac{a}{b}$ ein echter Bruch, so ist $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$, nach § 47, 2, weil in diesem Falle $\frac{a}{b} < \frac{c}{c}$.

4. Dagegen ist unter gleicher Bedingung $\frac{a-c}{b-c} < \frac{a}{b}$, nach § 47, 4.

§ 49.

Zur Ergänzung von § 30 ist nunmehr zu bemerken:

1. Wenn eine ganze Zahl von 2 an oder ein unechter Bruch mit einem unechten Bruche multiplicirt wird, so ist das Produkt größer als jeder Faktor, weil jeder größer als 1 ist, mithin (§ 31, 3) das Produkt aus ihm und dem andren Faktor größer sein muß als das Produkt aus 1 und diesem andren Faktor, d. h. größer als dieser andre Faktor.

2. Wenn eine ganze Zahl einschließlich der Eins oder ein unechter Bruch mit einem echten Bruche multiplicirt wird, so ist das Produkt kleiner als die ganze Zahl oder der unechte Bruch, weil der echte Bruch kleiner als 1 ist.

3. Wenn zwei echte Brüche mit einander multiplicirt werden, so ist das Produkt kleiner als jeder Faktor, weil jeder < 1.

§ 50.

1. Gleiches mit Gleichem dividirt giebt Gleiches. Ist $a = b$, so muß auch $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ sein (vgl. § 5, 4); ebenso $\frac{c}{a} = \frac{c}{b}$.

2. Umgekehrt: wenn $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, so ist auch $\frac{a}{c} \cdot c = \frac{b}{c} \cdot c$ d. h. $a = b$ (§ 31, 1). Ferner: wenn $\frac{c}{a} = \frac{c}{b}$, so folgt aus $\frac{c}{a} \cdot a = \frac{c}{b} \cdot b$ nach § 31, 2, daß $a = b$.

3. Ist $a > b$, so ist auch $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. Denn wäre $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, so müßte (N. 2) auch $a = b$ sein; oder wäre $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$, so müßte (§ 31, 3) $\frac{a}{c} \cdot c < \frac{b}{c} \cdot c$ d. h. $a < b$ sein.

4. Ist $b > c$, so ist $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$. Denn wäre $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}$, so wäre $b = c$ (N. 2); oder wäre $\frac{a}{b} > \frac{a}{c}$, so müßte auch $\frac{a}{b} . (b . c) > \frac{a}{c} . (b . c)$ d. h. $a . c > a . b$ sein (§ 31, 3), folglich $b < c$ (§ 31, 4).

Sechstes Kapitel. Potenzirung.

§ 51.

1. Eine fünfte Rechnungsart ist die Potenzirung. Eine Zahl a mit einer andren b potenziren heißt: ein Produkt von so vielen Faktoren, deren jeder = a ist, bilden als die Zahl b Einheiten enthält. Dieses Produkt nennt man eine Potenz und namentlich die bte Potenz oder die Potenz des bten Grades von a und bezeichnet es mit Rücksicht auf diese seine Beziehung zu a und b indem man b rechts und etwas oberhalb der Zeile neben a schreibt, also durch a^b (sprich: a potenzirt mit b oder a zur bten oder auf der bten (nämlich Potenz) oder a hoch b; statt: a mit b potenziren sagt man nämlich auch: a zur bten oder auf die bte Potenz erheben). Die Zahl a nennt man die Grundzahl oder Basis, die Zahl b die Gradzahl oder den Exponenten der Potenz; je größer b, desto höher der Grad der Potenz oder schlechthin die Potenz. Die zweite Potenz nennt man auch das Quadrat, die dritte den Kubus oder Würfel, die vierte das Biquadrat der Grundzahl, und das Erheben zur zweiten Potenz das Quadriren, das Erheben zur dritten das Kubiren.

2. Da 1 . 1 wieder = 1 (vgl. § 20, 6), so kann auch jeder Ausdruck wie 1^a, sofern a eine eigentliche Zahl von 2 an bedeutet, nur = 1 sein; ebenso 0^a nur = 0.

3. Jeder Ausdruck wie a^1 kann nur so viel als a selbst bedeuten. Denn die Potenzen von a bilden folgende Reihe:

$$a . a,\; a . a . a,\; a . a . a . a \;.\;.\;.\;.\;.$$
$$\text{oder}\quad a^2,\quad a^3,\quad a^4\quad .\;.\;.\;.\;.,$$

von deren Gliedern jedes aus dem nächstvorhergehenden durch Multiplikation mit a, wobei der Exponent um 1 größer wird, und aus dem nächstfolgenden durch Division mit a, wobei der Exponent um 1 kleiner wird, erzeugt werden kann. Dehnt man letzteres Verfahren auch auf das erste Reihenglied aus, so ergiebt sich $\frac{a . a}{a} = a = a^1$.

4. Geht man noch einen Schritt weiter, so erhält man $\frac{a}{a} = 1 = a^0$.

Jeder Ausdruck wie a^0 ist also $= 1$; ausgenommen 0^0, was zwar auch für 1 gelten, aber außerdem noch jeden andren Werth haben kann. Denn da 0^1 nothwendig $= 0$, so ergiebt sich nach der eben gebrauchten Schlußweise: $0^0 = \frac{0}{0}$, was nach § 32, 8 ein Ausdruck von völlig unbestimmter Bedeutung ist.

§ 52.

1. Wenn die Grundzahl schon in Form eines Produktes gegeben ist, so ist irgend eine Potenz derselben gleich dem Produkte der ebensovielten oder gleichhohen oder gleichgradigen Potenzen der Faktoren; es ist allgemein

$$(a \,.\, b)^c = a^c \,.\, b^c.$$

Denn es ist $(a \,.\, b)^c$ ein Produkt von c Faktoren $(a \,.\, b)$; nun kann man sich aber nach § 29, 1 zunächst die c Faktoren a zusammengestellt und mit einander multiplicirt denken und dann die c Faktoren b, wodurch $(a \,.\, b) \,.\, (a \,.\, b) \,.\,.\,.\,.\,.$ in $(a \,.\, a \,.\,.\,.) \,.\, (b \,.\, b \,.\,.\,.)$ d. h. in $a^c \,.\, b^c$ übergeht.

2. Umgekehrt muß also auch

$$a^c \,.\, b^c = (a \,.\, b)^c$$

sein, d. h. das Produkt zweier gleichhohen Potenzen ist nothwendig gleich der ebensohohen Potenz des Produktes der Grundzahlen.

3. Der Potenzexponent wird immer nur auf den einzelnen zunächst vor ihm stehenden Ausdruck bezogen, so lange nicht mehrere vorhergehende Ausdrücke in Klammern eingeschlossen und dadurch zusammen als Grundzahl der Potenz bezeichnet sind; so daß z. B. $a \,.\, b^c$ nicht die cte Potenz von $a \,.\, b$, sondern die Zahl a, multiplicirt mit der cten Potenz von b bedeutet.

§ 53.

1. Ist die Grundzahl in Form eines Quotienten gegeben, so ist jede Potenz derselben gleich der ebensohohen Potenz des Dividenden, dividirt durch die gleichgradige Potenz des Divisors; in Zeichen:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}.$$

Denn es ist einerseits $\left(\frac{a}{b}\right)^c \,.\, b^c$ nach § 52, 2 so viel als $\left(\frac{a}{b} \,.\, b\right)^c = a^c$; andrerseits ist $\frac{a^c}{b^c} \,.\, b^c$ auch $= a^c$; da also $\left(\frac{a}{b}\right)^c \,.\, b^c = \frac{a^c}{b^c} \,.\, b^c$, so u. s. w. (§ 31, 2).

2. Umgekehrt ist also nothwendig auch

$$\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c,$$

d. h. anstatt eine Potenz durch die gleichhohe einer andren Grundzahl

zu dividiren, kann man die Grundzahl der ersten durch die Grundzahl der zweiten dividiren und den Quotienten mit dem gemeinsamen Exponenten potenziren.

3. Hier macht der Querstrich als Divisionszeichen die Klammern nicht entbehrlich, vgl. § 32, 3; 33, 3.

§ 54.

1. Die Grundzahl kann ferner in Form eines Produktes mehrerer Faktoren (§ 29) oder als ein aus Faktoren und Divisoren nach § 46 zusammengesetzter Ausdruck gegeben sein; auch in diesen Fällen kann man die Potenz sofort nach § 52, 1 und 53, 1 umformen, d. h. es ist z. B. $(a \,.\, b \,.\, c \,.\, d)^m = a^m \,.\, b^m \,.\, c^m \,.\, d^m$ und $(a \,.\, b : c : d \,.\, e)^n = a^n \,.\, b^n : c^n : d^n \,.\, e^n$, da nämlich $(a \,.\, b \,.\, c \,.\, d)^m = (((a \,.\, b) \,.\, c) \,.\, d)^m = ((a \,.\, b) \,.\, c)^m \,.\, d^m$ u. s. w.

2. Umgekehrt läßt sich ein aus mehr als zwei Faktoren bestehendes Produkt oder ein aus Faktoren und Divisoren gebildeter Ausdruck, wenn alle Faktoren und Divisoren gleichgradige Potenzen sind, sofort nach § 52, 2 und 53, 2 in eine Potenz desselben Grades verwandeln; es ist z. B. $f^m \,.\, g^m \,.\, h^m = (f \,.\, g \,.\, h)^m$ und $p^n : q^n \,.\, r^n \,.\, s^n : t^n = (p : q \,.\, r \,.\, s : t)^n$.

§ 55.

1. Der Exponent kann die Form einer Summe haben; dann ist die Potenz gleich dem Produkte derjenigen Potenzen der Grundzahl, deren Grade durch die einzelnen Summanden angegeben werden; in Zeichen:

$$a^{b+c} = a^b \,.\, a^c.$$

Denn es ist a^{b+c} ein Produkt aus $b + c$ Faktoren a; hievon kann man sich (vgl. § 29) die b ersten zunächst mit einander multiplicirt denken und ihr Produkt mit dem Produkte der c übrigen; das erste Produkt ist aber $= a^b$ und das zweite $= a^c$.

2. Umgekehrt muß also auch

$$a^b \,.\, a^c = a^{b+c}$$

sein, d. h. das Produkt zweier Potenzen einer und derselben Grundzahl ist gleich der mit der Summe der Exponenten potenzirten Grundzahl.

§ 56.

1. Der Exponent kann auch in Form einer Differenz gegeben sein; eine Zahl mit einer Differenz potenziren ist aber so viel als sie mit dem Minuenden und mit dem Subtrahenden potenziren und erstere Potenz durch letztere dividiren; in Zeichen:

$$a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}.$$

Denn es ist einerseits $a^{b-c} \,.\, a^c = a^{(b-c)+c} = a^b$ (§ 55, 2), andrerseits $\frac{a^b}{a^c} \,.\, a^c = a^b$; da also $a^{b-c} \,.\, a^c = \frac{a^b}{a^c} \,.\, a^c$, so u. s. w. (§ 31, 2).

2. Umgekehrt ist also nothwendig auch

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c},$$

d. h. anstatt eine Potenz durch eine andre Potenz der nämlichen Grundzahl zu dividiren, kann man den Exponenten der letzteren von dem der ersteren subtrahiren und mit dieser Differenz die Grundzahl potenziren.

§ 57.

1. Nach § 55 und 56, dann 51, 3 muß

$$a^{b+1} = a^b \cdot a^1 = a^b \cdot a \text{ und}$$

$$a^{b-1} = \frac{a^b}{a^1} = \frac{a^b}{a},$$

sowie umgekehrt $a^b \cdot a = a^{b+1}$ und $\frac{a^b}{a} = a^{b-1}$ sein.

2. Es ist allgemein

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}.$$

Denn es ist $a^{-b} = a^{0-b} = \frac{a^0}{a^b}$ (§ 56, 1), also $= \frac{1}{a^b}$ (§ 51, 4).

3. Nur für 0^{-b} ergiebt sich nicht bloß $\frac{1}{0^b} = \frac{1}{0}$ (vgl. § 32, 7; 45, 5; 51; 2), sondern es ist vielmehr $0^{-b} = \frac{0^0}{0^b} = \frac{0}{0} : 0$, also, da $\frac{0}{0}$ auch $= 0$ sein kann, wieder ein völlig unbestimmter Ausdruck (vgl. § 32, 8; 51, 2 und 4).

4. Nach § 51, 2 und 53, 2 muß aber auch $\frac{1}{a^b} = \frac{1^b}{a^b} = \left(\frac{1}{a}\right)^b$ sein; somit ist auch

$$a^{-b} = \left(\frac{1}{a}\right)^b.$$

5. Was auch a bedeuten möge, so pflegt man $\frac{1}{a}$ den **reciproken Werth** von a zu nennen. Hienach kann man die unter N. 2 und 4 aufgestellten Gleichungen in Worten so ausdrücken: eine Potenz mit negativem Exponenten, oder kürzer: eine **negative** Potenz ist gleich dem reciproken Werthe der entsprechenden positiven Potenz, und auch gleich der entsprechenden positiven Potenz des reciproken Werthes der Grundzahl.

§ 58.

1. Wenn der Exponent eine mehrgliedrige gleichartige oder gemischte Summe ist, so kann man z. B. für a^{b+c+d} nach § 55, 1

sofort setzen $a^b \,.\, a^c \,.\, a^d$, da $a^{b + c + d} = a^{(b + c) + d}$ und $a^b \,.\, a^c \,.\, a^d = (a^b \,.\, a^c) \,.\, a^d$ (§ 8 und 29), und ebenso z. B. für $a^{b - c - d + e + f - g}$ nach § 55, 1 und 56, 1 sofort $a^b : a^c : a^d \,.\, a^e \,.\, a^f : a^g$, da $a^{b - c - d + e + f - g} = a^{((((b - c) - d) + e) + f) - g}$ und $a^b : a^c : a^d \,.\, a^e \,.\, a^f : a^g = ((((a^b : a^c) : a^d) \,.\, a^e) \,.\, a^f) : a^g$ (§ 17, 1 und 46, 1).

2. Umgekehrt kann man, wenn mehr als zwei Potenzen der nämlichen Grundzahl entweder bloß durch Multiplikation (vgl. § 29) oder theils durch Multiplikation theils durch Division (vgl. § 46) verbunden sind, sie sofort nach § 55, 2 und 56, 2 in eine einzige Potenz der nämlichen Grundzahl verwandeln, deren Exponent im ersten Falle eine gleichartige, im zweiten eine gemischte mehrgliedrige Summe der gegebenen Exponenten ist.

§ 59.

1. Die Grundzahl kann auch selbst schon in Form einer Potenz gegeben sein; eine Potenz a^b mit einer Zahl c potenziren ist aber so viel als die Grundzahl a mit c und die sich ergebende Potenz mit dem Exponenten b potenziren, oder auch so viel als die Grundzahl a mit dem Produkte der Exponenten b und c potenziren; in Zeichen:

$$(a^b)^c = (a^c)^b = a^{b \,.\, c}.$$

Denn es ist $(a^b)^c$ ein Produkt von c Faktoren a^b; insofern nun diese Faktoren den Exponenten b gemein haben, muß ihr Produkt nach § 52, 2 und 54, 2 $= (a \,.\, a \,.\, .\, .\, .\, .\, .)^b$ d. h. $= (a^c)^b$ sein; insoferne sie aber die Grundzahl a gemein haben, muß ihr Produkt nach § 55, 2 und 58, 2 auch $= a^{b + b + \,.\,.\,.\,.}$ d. h. $= a^{b \,.\, c}$ sein.

2. Umgekehrt muß daher auch

$$a^{b \,.\, c} = (a^b)^c = (a^c)^b$$

sein, d. h. anstatt eine Zahl mit einem Produkte zu potenziren, kann man sie beliebig mit dem ersten oder dem zweiten Faktor potenziren und diese Potenz bezüglich mit dem zweiten oder ersten.

3. Ferner ist hienach auch $((a^b)^c)^d = ((a^c)^b)^d = ((a^b)^d)^c = ((a^c)^d)^b = ((a^d)^b)^c = ((a^d)^c)^b = a^{b \,.\, c \,.\, d} = a^{c \,.\, b \,.\, d}$ u. s. f. und ganz ähnlich verhält sich's, wenn mehr als drei Exponenten sich zuletzt auf eine und dieselbe Grundzahl beziehen.

§ 60.

1. Die Vielfachen der Zahl Zwei mit Einschluß des Einfachen (der Zahl Zwei selbst), also die Zahlen

$$2 \,.\, 1 \;,\; 2 \,.\, 2 \;,\; 2 \,.\, 3 \;,\; 2 \,.\, 4 \;.\,.\,.\,.\,.$$

oder $2 \;,\; 2 + 2 \,,\; (2 + 2) + 2 \,,\; (2 + 2 + 2) + 2 \;.\,.\,.\,.\,,$

nennt man gerade Zahlen, alle übrigen Zahlen aber, mit Einschluß der Eins, ungerade. Bezeichnet n irgend eine eigentliche Zahl mit Einschluß der Eins, so kann jede gerade Zahl unter der allgemeinen Form 2 . n oder (mit Weglassung des Multiplikationszeichens, § 20, 1) 2 n dargestellt werden; ja man kann dem n sogar die Bedeutung o unterlegen und hienach auch 2 . o = o als gerade Zahl d. h. als Viel-

faches von 2 gelten lassen, da in obiger Reihe jedes Glied aus dem folgenden durch Subtraktion der 2 hervorgeht und, wenn man dies Subtrahiren auch auf das erste Reihenglied 2 ausdehnt, $2 - 2 = 0$ sich ergiebt. Jede ungerade Zahl kann man dann aber unter der allgemeinen Form $2 \,.\, n + 1$ oder $2\,n + 1$ darstellen.

2. Wenn nun die Grundzahl einer Potenz eine negative Zahl und der Exponent eine gerade positive Zahl ist, so ist die Potenz positiv und zwar gleich der ebensohohen Potenz der als positiv betrachteten Grundzahl; es ist allgemein

$$(-a)^{2n} = a^{2n}.$$

Denn nach § 59, 2 ist $(-a)^{2n} = ((-a)^2)^n$; aber $(-a)^2$ ist $= (-a) \,.\, (-a) = a \,.\, a = a^2$ (§ 26, 3); also ist $(-a)^{2n} = (a^2)^n = a^{2n}$ (§ 59, 1).

3. Ist aber der Exponent eine ungerade Zahl, so ist die Potenz negativ und zwar gleich der negativ genommenen ebensohohen Potenz der als positiv betrachteten Grundzahl; es ist allgemein

$$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

Denn es ist $(-a)^{2n+1} = (-a)^{2n} \,.\, (-a)$, § 57, 1; also (nach N. 2) $= a^{2n} \,.\, (-a)$, was (nach § 26, 2) $= -a^{2n} \,.\, a$ und (nach § 57, 1) $= -a^{2n+1}$ ist.

4. Hienach und nach § 51, 2 ist $(-1)^{2n} = 1$ und $(-1)^{2n+1} = -1$.

§ 61.

1. Es ist $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + a\,b + b\,a + b^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$.

2. Setzt man $-b$ statt b, so folgt hieraus sofort $(a + (-b))^2$ d. h. $(a - b)^2 = a^2 + 2\,a\,(-b) + (-b)^2 = a^2 + (-2\,a\,b) + b^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$ (§ 60, 2).

3. Weiter ergiebt sich $(a + b)^2 + (a - b)^2 = (a^2 + 2\,a\,b + b^2) + (a^2 - 2\,a\,b + b^2) = 2\,(a^2 + b^2)$ und $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4\,a\,b$.

4. Setzt man $b = 1$, so ist $(a + 1)^2 = a^2 + 2\,a + 1 = a^2 + a + (a + 1)$, d. h. aus dem Quadrat einer Zahl a erhält man das Quadrat der nächstfolgenden $a + 1$, wenn man zum Quadrate der ersten sie selbst und die nächstfolgende addirt. Ebenso ist $(a - 1)^2 = a^2 - 2\,a + 1 = a^2 - (2\,a - 1) = a^2 - (a + (a - 1)) = a^2 - a - (a - 1)$, d. h. aus dem Quadrat einer Zahl a erhält man das Quadrat der nächstvorhergehenden $a - 1$, wenn man vom Quadrate der ersten sie selbst und die nächstvorhergehende subtrahirt.

5. Es ist $(a + b)^3 = (a + b)^2\,(a + b) = (a^2 + 2\,a\,b + b^2) \times (a + b) = a^2\,(a + b) + 2\,a\,b\,(a + b) + b^2\,(a + b) = a^3 + a^2\,b + 2\,a^2\,b + 2\,a\,b^2 + a\,b^2 + b^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$, wofür man auch setzen kann $a^3 + 3\,a\,b\,(a + b) + b^3$.

6. Vertauscht man b mit $-b$, so folgt hieraus unmittelbar $(a + (-b))^3$ d. h. $(a - b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,(-b) + 3\,a\,(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3$ (§ 60, 2 und 3), was auch $= a^3 - 3\,a\,b\,(a - b) - b^3$ ist.

§ 62.

1. Es ist allgemein, wenn m eine eigentliche Zahl von 2 an bedeutet,

$$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2} b + a^{m-3} b^2 + \ldots \ldots + a^2 b^{m-3} + a b^{m-2} + b^{m-1}),$$

wobei der zweite Faktor des Produktes auf der rechten Seite der Gleichung, da $a^{m-1} = a^{m-1} b^0$, $a^{m-2} b = a^{m-2} b^1$, $a b^{m-2} = a^1 b^{m-2}$ und $b^{m-1} = a^0 b^{m-1}$, eine Summe von m Gliedern vorstellt, deren jedes ein Produkt einer Potenz von a und einer Potenz von b ist, so daß die Potenzexponenten von a abnehmen von m — 1 an bis herab zu o und die Potenzexponenten von b zunehmen von o an bis hinauf zu m — 1 und die Summe der Potenzexponenten von a und b in jedem Gliede = m — 1 ist.

Denn multiplicirt man den Minuenden von a — b mit der eben besprochnen Summe, so ergiebt sich $a^m + a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 + \ldots + a^3 b^{m-3} + a^2 b^{m-2} + a b^{m-1}$, und multiplicirt man den Subtrahenden b mit derselben, so ergiebt sich $a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 + a^{m-3} b^3 + \ldots + a^2 b^{m-2} + a b^{m-1} + b^m$; wird nun letztere Summe von ersterer abgezogen, so erhält man, indem die Glieder $a^{m-1} b$ bis $a b^{m-1}$ verschwinden, $a^m - b^m$.

So ist z. B. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + a b + b^2)$,
$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3)$,
$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4)$
u. s. f.

2. Setzt man m = 2 n, so ist $a^{2n} - b^{2n} = (a - b)(a^{2n-1} + a^{2n-2} b + a^{2n-3} b^2 + \ldots + a^2 b^{2n-3} + a b^{2n-2} + b^{2n-1})$. Wird nun b mit — b vertauscht, so geht (§ 60, 2 und 3) $a^{2n} - b^{2n}$ in $a^{2n} - (-b)^{2n} = a^{2n} - b^{2n}$, a — b in $a - (-b) = a + b$ und die mehrgliedrige Summe in $a^{2n-1} + a^{2n-2}(-b) + a^{2n-3}(-b)^2 + \ldots + a^2(-b)^{2n-3} + a(-b)^{2n-2} + (-b)^{2n-1} = a^{2n-1} - a^{2n-2} b + a^{2n-3} b^2 + \ldots - a^2 b^{2n-3} + a b^{2n-2} - b^{2n-1}$ über, d. h. alle Glieder dieser Summe, welche eine Potenz von b mit geradem Exponenten, oder kürzer: eine gerade Potenz von b enthalten, bleiben positiv, aber alle Glieder, welche eine ungerade Potenz von b enthalten, werden negativ, so daß allgemein

$$a^{2n} - b^{2n} = (a + b)(a^{2n-1} - a^{2n-2} b + a^{2n-3} b^2 \ldots - a^2 b^{2n-3} + a b^{2n-2} - b^{2n-1}$$

ist; also z. B.

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$,
$a^4 - b^4 = (a + b)(a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3)$ u. s. f.

3. Setzt man aber m = 2 n + 1, so ist $a^{2n+1} - b^{2n+1} = (a - b)(a^{2n} + a^{2n-1} b + a^{2n-2} b^2 + \ldots + a^2 b^{2n-2} + a b^{2n-1} + b^{2n})$. Wird nun wieder b mit — b vertauscht, so geht $a^{2n+1} - b^{2n+1}$ in $a^{2n+1} - (-b)^{2n+1} = a^{2n+1} +$

b^{2n+1}, $a - b$ in $a - (-b) = a + b$ und die mehrgliedrige Summe in $a^{2n} + a^{2n-1}(-b) + a^{2n-2}(-b)^2 + \ldots + a^2(-b)^{2n-2} + a(-b)^{2n-1} + (-b)^{2n} = a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 + \ldots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}$ über, d. h. jedes Glied derselben, das eine gerade Potenz von b enthält, bleibt positiv, aber jedes eine ungerade Potenz von b enthaltende wird negativ, so daß allgemein

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 \ldots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$$

ist; also z. B.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$
$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \text{ u. s. f.}$$

4. Da nach Nr. 1 und 2 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, so ergiebt sich, indem man a mit a^n und b mit b^n vertauscht, $(a^n)^2 - (b^n)^2 = a^{2n} - b^{2n} = (a^n + b^n)(a^n - b^n)$.

5. Setzt man in Nr. 1 Eins an die Stelle von b, so ergiebt sich

$$a^m - 1 = (a - 1)(a^{m-1} + a^{m-2} + a^{m-3} + \ldots \ldots + a^2 + a + 1).$$

Für das 1, welches hier zunächst an der Stelle von b^{m-1} steht, kann man aber auch a^0 setzen und dann die Gleichung so in Worten ausdrücken: jede Potenz, deren Exponent eine eigentliche Zahl von 2 an, ist, um 1 vermindert, gleich dem Produkte der um 1 verminderten Grundzahl und der Summe aller Potenzen der letzteren von der nullten an bis hinauf zu derjenigen, welche der gegebenen zunächst vorausgeht.

6. Setzt man in Nr. 2 Eins für b, so erhält man

$$a^{2n} - 1 = (a + 1)(a^{2n-1} - a^{2n-2} + a^{2n-3} \ldots \ldots - a^2 + a - 1),$$

und geschieht dasselbe in Nr. 3, so ergiebt sich

$$a^{2n+1} + 1 = (a + 1)(a^{2n} - a^{2n-1} + a^{2n-2} \ldots \ldots + a^2 - a + 1).$$

7. Setzt man endlich in Nr. 4 Eins für b, so folgt $a^{2n} - 1 = (a^n + 1)(a^n - 1)$.

§ 63.

1. Eine mehrgliedrige gleichartige oder gemischte Summe, von deren Gliedern jedes eine Potenz einer und derselben Grundzahl enthält, wobei diese Potenzen mit anderweitigen Rechenausdrücken irgend welcher Art, die man Koefficienten zu nennen und voranzustellen pflegt, multiplicirt sein können, wird zu einem nach Potenzen geordneten Ausdrucke, wenn man, alle Glieder, welche dieselbe Potenz enthalten, zu einem Gliede zusammenfassend, die Glieder so reiht, daß die Exponenten nach der Folge der Zahlen zu- oder abnehmen, wie z. B. in $ba^2 + (c + d)a^3 - (e - f)a^5 + gha^6 + \frac{k}{l}a^8$ oder umgekehrt $\frac{k}{l}a^8 + gha^6 - (e - f)a^5 + (c + d)a^3 +$

$b\,a^2$; im ersten Falle ist der Ausdruck nach steigenden, im zweiten nach fallenden Potenzen geordnet.

2. In diesem Beispiele fehlen die Potenzen a^0, a^1, a^4, a^7; diese kann man aber mit dem Koefficienten o gleichfalls aufnehmen (§ 20, 6 und 6, 4), wodurch der Ausdruck folgende Form erhält: $o\,a^0 + o\,a^1 + b\,a^2 + (c + d)\,a^3 + o\,a^4 - (e - f)\,a^5 + g\,h\,a^6 + o\,a^7 + \frac{k}{l}\,a^8$ oder $\frac{k}{l}\,a^8 + o\,a^7 + g\,h\,a^6 - (e - f)\,a^5 + o\,a^4 + (c + d)\,a^3 + b\,a^2 + o\,a^1 + o\,a^0$.

3. Auch Potenzen mit negativen Exponenten (negative Potenzen, § 57, 5) können in einem solchen Ausdrucke vorkommen; diese nehmen, nach § 18, 1, diejenigen Stellen ein, welche von den positiven Potenzen aus jenseits der nullten liegen, und ordnen sich unter einander nach § 18, 2; so daß man z. B. schreibt: $p\,a^{-3} - q\,a^{-2} + r\,a^{-1} + o\,a^0 + o\,a^1 + b\,a^2$ u. s. f. oder umgekehrt: $b\,a^2 + o\,a^1 + o\,a^0 + r\,a^{-1} - q\,a^{-2} + p\,a^{-3}$.

§ 64.

1. Wenn die Grundzahl eine eigentliche Zahl von 2 an oder ein unechter Bruch und der Exponent eine eigentliche Zahl von 2 an ist, so ist die Potenz größer als die Grundzahl. Denn in diesem Falle muß schon die zweite Potenz größer als die Grundzahl sein (vgl. § 30 und 49, 1) und um so mehr jede höhere.

2. Wenn aber die Grundzahl ein echter Bruch ist, so muß nach § 49, 3 schon die zweite, um so mehr also jede höhere Potenz kleiner sein als die Grundzahl.

§ 65.

1. Gleiches mit Gleichem potenzirt giebt Gleiches. Ist $a = b$, so muß auch $a^c = b^c$ und $c^a = c^b$ sein (vgl. § 5, 4).

2. Umgekehrt: wenn $a^c = b^c$, so ist daraus zu schließen, daß auch $a = b$, sofern nicht etwa $c = o$ (§ 51, 4); auch wenn c eine gerade Zahl, ist nicht ausschließlich $a = b$, sondern es kann auch $a = -b$ (oder $b = -a$) sein (§ 60, 2).

3. Ebenso: wenn $c^a = c^b$, so kann man schließen, daß auch $a = b$, sofern nicht etwa $c = 1$ oder $= o$ (§ 51, 2).

4. Wenn $a > b$ und c eine eigentliche Zahl (oder auch 1), so ist $a^c > b^c$. Denn nach § 31, 3 muß $a \,.\, a > b \,.\, a$ und $b \,.\, a > b \,.\, b$, um so mehr also $a \,.\, a > b \,.\, b$ d. h. $a^2 > b^2$ sein; ebenso $a^2 \,.\, a > b^2 \,.\, a$ und $b^2 \,.\, a > b^2 \,.\, b$, mithin $a^3 > b^3$ u. s. f.

5. Umgekehrt: wenn (während c eine eigentliche Zahl) $a^c > b^c$ ist, so muß auch $a > b$ sein. Denn wäre $a = b$, so müßte auch $a^c = b^c$ sein (N. 1); oder wäre $a < b$, so müßte $a^c < b^c$ sein (N. 4).

Siebentes Kapitel. Radicirung.

§ 66.

1. Eine sechste Rechnungsart ist die Radicirung, Wurzelausziehung, Wurzelrechnung. Eine Zahl a mit einer andren b radiciren oder aus a die bte Wurzel, die Wurzel des bten Grades ziehen heißt: aus diesen beiden Zahlen eine dritte herleiten, welche, mit b potenzirt, a giebt. Die Zahl a heißt der Radikand, die Zahl b der Exponent, der Wurzelexponent, die Gradzahl; die zu findende dritte Zahl nennt man die Wurzel und bezeichnet sie als Ergebniß der Radicirung indem man vor den Ausdruck des Radikanden das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ und in dieses oberhalb der Zeile den Ausdruck des Exponenten setzt, also durch $\sqrt[b]{a}$ (sprich: a radicirt mit b, oder: bte Wurzel aus oder von a). Ist der Exponent die Zahl 2, so schreibt man bloß $\sqrt{a}$; eine solche Wurzel heißt auch die Quadratwurzel, sowie die dritte Wurzel $\sqrt[3]{a}$ die Kubikwurzel von a (vgl. § 51, 1).

2. Hienach ist immer

$$\left(\sqrt[b]{a}\right)^b = a;$$

ferner

$$\sqrt[b]{(a^b)} = a,$$

d. h. wenn man eine Potenz mit ihrem Exponenten radicirt, so ergiebt sich die Grundzahl.

3. Demgemäß und nach § 51, 2 muß $\sqrt[a]{1} = \sqrt[a]{(1^a)} = 1$ und $\sqrt[a]{o} = \sqrt[a]{(o^a)} = o$ sein.

4. Endlich kann $\sqrt[1]{a}$ nur $= \sqrt[1]{(a^1)} = a$ sein (§ 51, 3).

§ 67.

1. Der Radikand kann in der Form eines Produktes gegeben sein; dann ist die Wurzel gleich dem Produkte der ebensovielten oder gleichgradigen Wurzeln der Faktoren; in Zeichen:

$$\sqrt[c]{(a\,.\,b)} = \sqrt[c]{a}\,.\,\sqrt[c]{b}.$$

Denn es ist einerseits $\left(\sqrt[c]{(a\,.\,b)}\right)^c = a\,.\,b$ (§ 66, 2); andrerseits $(\sqrt[c]{a}\,.\,\sqrt[c]{b})^c = (\sqrt[c]{a})^c\,.\,(\sqrt[c]{b})^c = a\,.\,b$ (§ 52, 1); da also $\left(\sqrt[c]{(a.b)}\right)^c = \left(\sqrt[c]{a}\,.\,\sqrt[c]{b}\right)^c$, so muß (§ 65, 2) $\sqrt[c]{(a\,.\,b)} = \sqrt[c]{a}\,.\,\sqrt[c]{b}$ sein.

2. Umgekehrt muß also auch

$$\sqrt[c]{a} \,.\, \sqrt[c]{b} = \sqrt[c]{(a \,.\, b)}$$

sein, d. h. das Produkt zweier gleichgradigen Wurzeln ist gleich der ebensovielten Wurzel des Produktes der Radikanden.

3. Es wird immer zunächst nur derjenige Ausdruck als Radikand betrachtet, welcher unmittelbar auf das Wurzelzeichen folgt; so daß z. B. $\sqrt[c]{a} \,.\, b$ vielmehr bedeuten würde: $\sqrt[c]{a}$ multiplicirt mit b. Uebrigens ersetzt man hier die Klammern häufig durch Ausdehnung des Wurzelzeichens über den Radikanden, indem man z. B. für $\sqrt[c]{(a \,.\, b)}$ schreibt $\sqrt[c]{a \,.\, b}$.

4. Nach N. 2 und § 66, 2 ist $a \,.\, \sqrt[c]{b} = \sqrt[c]{a^c} \,.\, \sqrt[c]{b} = \sqrt[c]{a^c \,.\, b}$. Hienach läßt sich jede Zahl, womit eine Wurzel multiplicirt ist, mit letzterer zu einer Wurzel desselben Grades zusammenziehen. Man nennt dies: den Faktor unter das Wurzelzeichen bringen oder unter dem Wurzelzeichen unterbringen.

5. Produkte aus Wurzeln und andern Ausdrücken schreibt man gerne so, daß letztere vorangehn, also lieber $a \,.\, \sqrt[c]{b}$ oder $a\sqrt[c]{b}$ als $\sqrt[c]{b} \,.\, a$, ohne gerade a als Multiplikanden bezeichnen zu wollen (vgl. § 20, 2).

§ 68.

1. Ist der Radikand in Form eines Quotienten gegeben, so ist die Wurzel gleich der ebensovielten Wurzel des Dividenden, dividirt durch die gleichgradige Wurzel des Divisors; in Zeichen:

$$\sqrt[c]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[c]{a}}{\sqrt[c]{b}}.$$

Denn es ist einerseits $\left(\sqrt[c]{\frac{a}{b}}\right)^c = \frac{a}{b}$, andrerseits $\left(\frac{\sqrt[c]{a}}{\sqrt[c]{b}}\right)^c = \frac{(\sqrt[c]{a})^c}{(\sqrt[c]{b})^c} = \frac{a}{b}$ (§ 53, 1); folglich (§ 65, 2) u. s. w. Oder: es ist einerseits $\sqrt[c]{\frac{a}{b}} \,.\, \sqrt[c]{b} = \sqrt[c]{\frac{a}{b} \,.\, b} = \sqrt[c]{a}$ (§ 67, 2) andrerseits $\frac{\sqrt[c]{a}}{\sqrt[c]{b}} \cdot \sqrt[c]{b} = \sqrt[c]{a}$; folglich (§ 31, 2) u. s. w.

2. Umgekehrt ist also nothwendig auch

$$\frac{\sqrt[c]{a}}{\sqrt[c]{b}} = \sqrt[c]{\frac{a}{b}},$$

d. h. anstatt eine Wurzel durch eine gleichgradige andre zu dividiren, kann man den Radikanden der ersten durch den der zweiten dividiren und den Quotienten mit dem gemeinsamen Exponenten radiciren.

3. Wenn man den Querstrich als Divisionszeichen gebraucht, so wird das Wurzelzeichen, wenn es sich auf den ganzen Quotienten bezieht, vor jenen gesetzt, ohne daß man der Klammern bedarf; dagegen würde man bei der Anwendung des Doppelpunktes nach § 67, 3 schreiben müssen: $\sqrt[c]{}(a : b)$ oder $\sqrt[c]{a : b}$. Vgl. § 53, 3.

4. Nach N. 1 und 2, dann § 66, 3 ist $\sqrt[b]{\frac{1}{a}} = \frac{\sqrt[b]{1}}{\sqrt[b]{a}} = \frac{1}{\sqrt[b]{a}}$, d. h. jede Wurzel aus dem reciproken Werthe (vgl. § 57, 5) einer Zahl ist gleich dem reciproken Werthe der gleichgradigen Wurzel aus eben dieser Zahl selbst, und umgekehrt: der reciproke Werth einer Wurzel ist gleich der ebensovielten Wurzel aus dem reciproken Werthe des Radikanden.

5. Ein Quotient, dessen Dividend eine Wurzel und dessen Divisor ein beliebiger Rechenausdruck ist, läßt sich nach § 66, 2 und obiger N. 2 in eine Wurzel aus einem Quotienten umformen, indem $\frac{\sqrt[b]{a}}{c} = \frac{\sqrt[b]{a}}{\sqrt[b]{c^b}} = \sqrt[b]{\frac{a}{c^b}}$. Vgl. § 67, 4.

6. Ein Quotient, dessen Divisor eine Wurzel enthält, soll öfters so umgeformt werden, daß letzterer keine Wurzel mehr enthalte; man nennt dies das **Fortschaffen des Wurzelzeichens aus dem Divisor**. Hat nun der Quotient die Form $\frac{a}{\sqrt[c]{b}}$, so ist er (§ 41, 1) $=$

$$\frac{a \,.\, \sqrt[c]{b^{c-1}}}{\sqrt[c]{b} \,.\, \sqrt[c]{b^{c-1}}}, \text{ also } = \frac{a \,.\, \sqrt[c]{b^{c-1}}}{\sqrt[c]{b \,.\, b^{c-1}}} = \frac{a \,.\, \sqrt[c]{b^{c-1}}}{\sqrt[c]{b^c}} =$$

$\frac{a \sqrt[c]{b^{c-1}}}{b}$ (§ 67, 2; 57, 1). Ein besondrer Fall hievon ist der, daß $c = 2$; dann ist $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$.

7. Ferner ist nach § 41, 1, dann 62, 1 und 2

$$\frac{a}{b + \sqrt{c}} = \frac{a\,(b - \sqrt{c})}{(b + \sqrt{c})(b - \sqrt{c})} = \frac{a\,(b - \sqrt{c})}{b^2 - (\sqrt{c})^2} = \frac{a\,(b - \sqrt{c})}{b^2 - c},$$

$$\frac{a}{b - \sqrt{c}} = \frac{a\,(b + \sqrt{c})}{b^2 - c}; \quad \frac{a}{\sqrt{b} + c} = \frac{a\,(\sqrt{b} - c)}{b - c^2};$$

$$\frac{a}{\sqrt{b} - c} = \frac{a\,(\sqrt{b} + c)}{b - c^2}; \quad \frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} = \frac{a\,(\sqrt{b} \mp \sqrt{c})}{b - c}.$$

§ 69.

1. Der Radikand kann auch ein Produkt von mehr als zwei Faktoren (§ 29) oder ein aus Faktoren und Divisoren gebildeter Ausdruck (§ 46) sein; dann ist z. B. nach § 67, 1

$$\sqrt[m]{a \,.\, b \,.\, c \,.\, d} = \sqrt[m]{((a \,.\, b) \,.\, c) \,.\, d)} = \sqrt[m]{((a \,.\, b) \,.\, c)} \,.\, \sqrt[m]{d}$$
$$= \sqrt[m]{(a \,.\, b)} \,.\, \sqrt[m]{c} \,.\, \sqrt[m]{d} = \sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{b} \,.\, \sqrt[m]{c} \,.\, \sqrt[m]{d},$$

oder nach § 67, 1 und 68, 1

$$\sqrt[m]{a \,.\, b : c \,.\, d : e} = \sqrt[m]{((((a \,.\, b) : c) \,.\, d) : e)} =$$
$$\sqrt[m]{(((a \,.\, b) : c) \,.\, d)} : \sqrt[m]{e} = \sqrt[m]{((a \,.\, b) : c)} \,.\, \sqrt[m]{d} : \sqrt[m]{e} \,.$$
$$= \sqrt[m]{(a \,.\, b)} : \sqrt[m]{c} \,.\, \sqrt[m]{d} : \sqrt[m]{e} = \sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{b} : \sqrt[m]{c} \,.\, \sqrt[m]{d} : \sqrt[m]{e}$$

2. Umgekehrt läßt sich ein Produkt mehrerer Faktoren oder ein aus Faktoren und Divisoren gemischter Ausdruck, wenn alle Faktoren und Divisoren gleichgradige Wurzeln sind, sofort nach § 67, 2 und 68, 2 zu einer Wurzel desselben Grades zusammenfassen.

§ 70.

1. Der Radikand kann ferner in Form einer Potenz gegeben sein. Eine Potenz a^b mit einer Zahl c radiciren ist aber so viel als die Grundzahl a mit c radiciren und diese Wurzel mit dem Potenzexponenten b potenziren, oder auch so viel als den Potenzexponenten b mit c dividiren und mit diesem Quotienten die Grundzahl a potenziren, oder endlich auch so viel als den Wurzelexponenten c mit dem Potenzexponenten b dividiren und mit diesem Quotienten die Grundzahl a radiciren; in Zeichen:

$$\sqrt[c]{a^b} = \left(\sqrt[c]{a}\right)^b = a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c:b]{a}\,.$$

Denn es ist erstens $\left(\sqrt[c]{a^b}\right)^c = a^b$; zweitens $\left(\left(\sqrt[c]{a}\right)^b\right)^c$ $= \left(\left(\sqrt[c]{a}\right)^c\right)^b = a^b$ (§ 59, 1); drittens $\left(a^{\frac{b}{c}}\right)^c = a^{\frac{b}{c} \cdot c} =$ a^b (§ 59, 1); viertens $\left(\sqrt[c:b]{a}\right)^c = \left(\sqrt[c:b]{a}\right)^{\frac{c}{b} \cdot b} = \left(\left(\sqrt[c:b]{a}\right)^{\frac{c}{b}}\right)^b$ $= a^b$ (§ 32, 2 und 59, 2); folglich (§ 65, 2) u. s. w.

2. Umgekehrt muß also auch

$$\left(\sqrt[b]{a}\right)^c = \sqrt[b]{a^c} = a^{\frac{c}{b}} = \sqrt[b:c]{a}$$

sein, d. h. anstatt eine Wurzel $\sqrt[b]{a}$ mit einer Zahl c zu potenziren, kann man den Radikanden a mit c potenziren und diese Potenz mit dem Wurzelexponenten b radiciren, oder man kann die Zahl c mit dem Wurzelexponenten b dividiren und mit diesem Quotienten den Radikanden potenziren, oder man kann den Wurzelexponenten b mit c dividiren und mit diesem Quotienten den Radikanden radiciren.

3. Ferner muß auch

$$a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b} = \left(\sqrt[c]{a}\right)^b = \sqrt[c:b]{a}$$

sein, d. h. anstatt eine Zahl a mit einem Quotienten $\frac{b}{c}$ zu potenziren, kann man sie mit dem Dividenden potenziren und diese Potenz mit dem Divisor radiciren, oder man kann die Zahl a mit dem Divisor radiciren und diese Wurzel mit dem Dividenden potenziren, oder man kann die Zahl a mit dem umgekehrten Quotienten (§ 40, 4) radiciren.

4. Der Quotient, mit dem eine Zahl potenzirt werden soll, kann natürlich auch ein Bruch sein; in diesem Falle nennt man die Potenz eine Potenz mit gebrochnem Exponenten oder kürzer eine gebrochne Potenz, während die Potenzen, deren Exponenten ganze Zahlen sind, ganze Potenzen heißen (vgl. § 42, 4). Uebrigens dehnt man die Benennung „gebrochne Potenz" wohl auch auf alle Potenzen aus, deren Exponent sich in der Form eines Quotienten darstellt.

5. Endlich muß auch

$$\sqrt[b:c]{a} = \left(\sqrt[b]{a}\right)^c = \sqrt[b]{a^c} = a^{\frac{c}{b}}$$

sein, d. h. eine Zahl a mit einem Quotienten $\frac{b}{c}$ radiciren ist so viel als sie mit dem Dividenden radiciren und diese Wurzel mit dem Divisor potenziren, oder so viel als die Zahl a mit dem Divisor potenziren und diese Potenz mit dem Dividenden radiciren, oder auch so viel als die Zahl a mit dem umgekehrten Quotienten potenziren.

6. Da jedenfalls $\sqrt[c]{(a^b)} = \left(\sqrt[c]{a}\right)^b$, so wird, wenn man mit Weglassung der Klammern $\sqrt[c]{a^b}$ schreibt, was zwar nach § 52, 3 zunächst so zu verstehn ist: (a^b), dagegen nach § 67, 3 zunächst so: $\left(\sqrt[c]{a}\right)^b$, wenigstens am Werthe des Ausdruckes $\sqrt[c]{(a^b)}$ oder $\sqrt[c]{a^b}$ nichts geändert.

7. Da $\sqrt[b]{a} = \sqrt[b]{a^1}$ (§ 51, 3) oder auch $= \sqrt[b:1]{a}$ (§ 32, 4), was Beides nach Obigem $= a^{\frac{1}{b}}$ sein muß, so kann jede Wurzel auch in Form einer Potenz dargestellt werden, deren Grundzahl der Radikand und deren Exponent der reciproke Werth (§ 57, 5) des Wurzelexponenten ist.

§ 71.

1. Der Radikand kann auch selbst schon die Form einer Wurzel haben. Eine Wurzel $\sqrt[b]{a}$ mit einer Zahl c radiciren ist aber so viel als a mit c und die sich dadurch ergebende Wurzel mit b radiciren, oder auch so viel als a mit dem Produkte der Wurzelexponenten b und c radiciren; in Zeichen:

$$\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[b]{\sqrt[c]{a}} = \sqrt[b.c]{a}.$$

Denn es ist erstens $\left(\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}}\right)^{b.c} = \left(\left(\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}}\right)^c\right)^b = \left(\sqrt[b]{a}\right)^b = a$ (§ 59, 2); zweitens $\left(\sqrt[b]{\sqrt[c]{a}}\right)^{b.c} = \left(\left(\sqrt[b]{\sqrt[c]{a}}\right)^b\right)^c = \left(\sqrt[c]{a}\right)^c = a$; drittens $\left(\sqrt[b.c]{a}\right)^{b.c} = a$; folglich (§ 65, 2) u. s. w.

2. Umgekehrt ist also nothwendig auch

$$\sqrt[b.c]{a} = \sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[b]{\sqrt[c]{a}},$$

d. h. anstatt eine Zahl mit einem Produkte zu radiciren, kann man sie beliebig mit dem ersten oder zweiten Faktor, und die sich ergebende Wurzel bezüglich mit dem zweiten oder ersten Faktor radiciren.

§ 72.

1. Der Werth eines Ausdruckes wie $\sqrt[c]{a^b}$ (a potenzirt mit b und radicirt mit c, vgl. § 70, 6) wird nicht geändert, wenn man den Potenz- und den Wurzelexponenten mit einer und derselben Zahl multiplicirt; es ist allgemein

$$\sqrt[c]{a^b} = \sqrt[c.d]{a^{b.d}}.$$

Denn nach § 70, 1 ist $\sqrt[c.d]{a^{b.d}} = a^{\frac{b.d}{c.d}}$; aber $\frac{b.d}{c.d}$ ist $= \frac{b}{c}$ (§ 41, 1) und $a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}$ (§ 70, 3).

2. Ebenso wenig wird der Werth eines solchen Ausdruckes (einer radicirten Potenz oder potenzirten Wurzel) geändert, wenn man den Potenz- und den Wurzelexponenten mit derselben Zahl dividirt; es ist immer

$$\sqrt[c]{a^b} = \sqrt[c:d]{a^{b:d}},$$

weil (§ 70, 1) $\sqrt[c:d]{a^{b:d}} = a^{\frac{b:d}{c:d}}$ und $\frac{b:d}{c:d} = \frac{b}{c}$ (§ 41, 2) und $a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}$ (§ 70, 3).

3. Namentlich ist auch $\sqrt[b]{a} = \sqrt[b]{a^1} = \sqrt[b.c]{a^{1.c}} = \sqrt[b.c]{a^c}$ (§ 51, 3; 20, 4 und 6).

4. Hienach kann man gegebene Wurzeln mit verschiedenen Exponenten in Wurzeln mit gleichen Exponenten verwandeln und dann, wenn etwa diese Wurzeln durch Multiplikation oder Division mit einander verbunden sind, nach § 67, 2; 68, 2; 69, 2 weiter verfahren. So z. B. ist, wenn $\sqrt[c]{a^b}$, $\sqrt[f]{d^e}$, $\sqrt[h]{g}$ gegeben sind, $\sqrt[c]{a^b} = \sqrt[cfh]{a^{bfh}}$, $\sqrt[f]{d^e} = \sqrt[cfh]{d^{ceh}}$, $\sqrt[h]{g} = \sqrt[cfh]{g^{cf}}$, mithin $\sqrt[c]{a^b} . \sqrt[f]{d^e} : \sqrt[h]{g} = \sqrt[cfh]{a^{bfh} . d^{ceh} : g^{cf}}$.

5. Ferner kann man einen Ausdruck von der Form $\sqrt[c]{a^b}$ öfters in einfacherer Form darstellen (eine Wurzel, deren Radikand eine Potenz ist, auf eine andre Wurzel von niedrigerem Grade zurückführen), wenn nämlich der Potenz- und der Wurzelexponent Produkte sind, die einen Faktor gemein haben; dividirt man beide mit diesem, so ergiebt sich z. B. $\sqrt[c.d]{a^{b.d}} = \sqrt[(c.d):d]{a^{(b.d):d}} = \sqrt[c]{a^b}$, und ähnlich $\sqrt[b.c]{a^b} = \sqrt[(b.c):b]{a^{(b.1):b}} = \sqrt[c]{a^1} = \sqrt[c]{a}$.

§ 73.

1. Es ist $\sqrt[-b]{a} = a^{\frac{1}{-b}} = a^{-\frac{1}{b}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{b}}} = \frac{1}{\sqrt[b]{a}}$ (§ 70, 7; 35, 2; 57, 2); in Worten: eine Wurzel mit negativem Exponenten ist gleich dem reciproken Werthe (§ 57, 5) der Wurzel, welche sich ergiebt, wenn man bei unverändertem Radikanden den negativen Wurzelexponenten als positiv betrachtet.

2. Weil aber nach § 68, 4 $\frac{1}{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[b]{\frac{1}{a}}$ sein muß, so ist $\sqrt[-b]{a}$ auch $= \sqrt[b]{\frac{1}{a}}$; in Worten: eine Wurzel mit negativem Exponenten ist gleich dem mit dem positiv genommenen Wurzelexponenten radicirten reciproken Werthe des Radikanden.

§ 74.

1. Beim Radiciren wird zunächst vorausgesetzt, daß der Radikand wirklich eine Potenz irgend einer Zahl und zwar eine Potenz von dem durch den Wurzelexponenten angegebenen Grade sei. Wenn man aber die Glieder der Zahlenreihe nach und nach auf die zweite, dritte, vierte Potenz u. s. f. erhebt und die Ergebnisse wieder nach der Reihenfolge der Zahlen ordnet, so überzeugt man sich bald, daß von den sich hiebei ergebenden wirklichen Potenzen keinenfalls jede als eine Potenz von jedem beliebigen Grade betrachtet werden kann, wiewohl manche in dieser Beziehung eine mehrfache Auffassung zulassen (so z. B. 64, was sowohl $= 2^6$ als $= 4^3$ als $= 8^2$ ist); sodann daß zwischen den Potenzen viele Lücken übrig bleiben, die durch Zahlen ausgefüllt werden, welche überhaupt keine wirklichen Potenzen sind. Wenn nun gleichwohl eine Zahl als Radikand hingestellt ist, ohne wirklich die durch den Wurzelexponenten angegebene Potenz irgend eines Gliedes der Zahlenreihe zu sein, so hat ein solcher der Form nach eine Wurzel darstellender Ausdruck, insofern er kein Glied der Zahlenreihe vorstellt, an sich eigentlich keine Bedeutung; indessen kann er, in Verbindung mit andern Ausdrücken nach den für Wurzeln geltenden Rechengesetzen behandelt, doch zu einem Ergebniß führen, dem wirkliche Bedeutung zukommt. Wiewohl

z. B. $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{4}$ an sich bedeutungslose Ausdrücke sind, insofern es keine eigentliche Zahl giebt, deren dritte Potenz = 2 oder = 4 wäre, so bedeutet doch $\sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt[3]{4}$, was nach § 67, 2 $= \sqrt[3]{2 \,.\, 4}$ sein muß, allerdings etwas, da $2 \,.\, 4 = 8 = 2^3$, also $\sqrt[3]{2 \,.\, 4} = 2$ ist.

2. Man nennt dergleichen Ausdrücke, insoferne sie die Form von Wurzeln haben, irrationale Wurzeln und, insofern auch sie Zahlen im weiteren Sinne des Wortes heißen können (vgl. § 3, 2; 16, 3; 42, 4), irrationale oder Irrational-Zahlen, wogegen man die ganzen Zahlen und die Brüche unter der gemeinsamen Benennung: rationale oder Rational-Zahlen begreift.

§ 75.

1. Uebrigens lassen die irrationalen Wurzeln doch gewissermaßen eine selbständige Auffassung, ähnlich den Brüchen (§ 44), zu, nach welcher sie, wie diese, als eine Art Mittelglieder zwischen den Gliedern der Zahlenreihe betrachtet werden können. Radicirt man z. B. die Glieder der Zahlenreihe von 1 an mit 2, so ergiebt sich die Reihe der Quadratwurzeln

$$\sqrt{1},\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \sqrt{8},\ \sqrt{9} \text{ u. s. f.}$$

Hievon ist $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3 \ldots$ Ferner ist $(\sqrt{1})^2 = 1$, $(\sqrt{2})^2 = 2$, $(\sqrt{3})^2 = 3$, $(\sqrt{4})^2 = 4 \ldots.$ Nach § 65, 5 muß nun $\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$ d. h. $1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < 2$ sein; es sind also $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ als eine Art Mittelglieder zwischen die Glieder 1 und 2 der Zahlenreihe zu stellen, so zwar, daß $\sqrt{3}$ auf $\sqrt{2}$ folgt. Ebenso stellen sich $\sqrt{5}$ bis $\sqrt{8}$ nach der Reihenfolge ihrer Radikanden zwischen $\sqrt{4} = 2$ und $\sqrt{9} = 3$ u. s. f. Ferner ergiebt sich, wenn man die Glieder der Zahlenreihe von 1 an mit 3 radicirt, die Reihe der Kubikwurzeln

$$\sqrt[3]{1},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[3]{6},\ \sqrt[3]{7},\ \sqrt[3]{8} \text{ u. s. f.}$$

Hier ist $\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[3]{8} = 2 \ldots.$ und aus obigen Gründen stellen sich $\sqrt[3]{2}$ bis $\sqrt[3]{7}$ nach der Folge der Radikanden zwischen $\sqrt[3]{1} = 1$ und $\sqrt[3]{8} = 2$ u. s. f.

2. Allgemein ist der Werth einer irrationalen Wurzel $\sqrt[b]{a}$ als zwischen c und c + 1 liegend anzusehen, oder es ist $\sqrt[b]{a} > c$ aber $< c + 1$, wenn $c^b < \left(\sqrt[b]{a}\right)^b$ d. h. $c^b < a$, dagegen $(c + 1)^b > a$ ist. Den Unterschied zwischen $\sqrt[b]{a}$ und der nächstkleineren ganzen Zahl c, der somit kleiner als 1 ist, nennt man die irrationale Ergänzung von c zum Werthe der Wurzel $\sqrt[b]{a}$.

3. Was für Zahlen von 2 an unter a und b verstanden sein

mögen, so ist (vgl. N. 1) immer $\sqrt[b]{1} < \sqrt[b]{a}$ oder $1 < \sqrt[b]{a}$, d. h. jede irrationale Wurzel ist größer als 1.

4. Es erhellt, daß auch negative Differenzen, deren Subtrahend eine irrationale Wurzel ist, namentlich also dergleichen Differenzen mit dem Minuenden o, negative irrationale Wurzeln, negative Irrationalzahlen, vorkommen können (vgl. § 45, 6).

§ 76.

1. Zwischen den irrationalen Wurzeln findet auch ein Unterschied statt, der sich mit dem zwischen unechten und echten Brüchen vergleichen läßt. Es giebt nämlich irrationale Wurzeln, deren Radikand ein Produkt ist aus einer Potenz des durch den Wurzelexponenten angegebenen Grades und aus einer andren Zahl, welche wenigstens keine Potenz gleichen Grades oder überhaupt gar keine wirkliche Potenz ist (vgl. § 74, 1). Solche irrationale Wurzeln kann man unechte, und alle andren, deren Radikanden keine solchen Produkte sind, echte irrationale Wurzeln nennen.

2. Jede unechte irrationale Wurzel läßt sich unter der allgemeinen Form $\sqrt[b]{a^b . c}$ darstellen. Nach § 67, 1 und 66, 2 ist dies $= \sqrt[b]{a^b} . \sqrt[b]{c} = a . \sqrt[b]{c}$. Jede unechte irrationale Wurzel läßt sich also umformen in ein Produkt aus einer Rationalzahl a und einer Wurzel gleichen Grades $\sqrt[b]{c}$. Man nennt dies das Absondern des rationalen Faktors; es entspricht dem Absondern der Ganzen bei unechten Brüchen (§ 43, 3). Die nach Absonderung des rationalen Faktors a übrig bleibende Wurzel $\sqrt[b]{c}$ ist eine echte irrationale; ihr Radikand c ist (vgl. N. 1) entweder eine Zahl, die überhaupt keine Potenz ist, oder eine Potenz d^e, deren Exponent e nicht $= b$, und zwar muß immer $e < b$ sein. Denn gesetzt es wäre $e > b$, etwa $e = b + f$, so wäre $\sqrt[b]{c} = \sqrt[b]{d^e} = \sqrt[b]{d^{b+f}} = \sqrt[b]{d^b . d^f}$ $= d . \sqrt[b]{d^f}$ d. h. man könnte noch einen rationalen Faktor d absondern, der noch zu a hinzutreten müßte. Auch kann der Radikand c, wenn er selbst keine Potenz ist, wenigstens ein Produkt sein, das eine Potenz von der letzterwähnten Art als Faktor enthält.

3. Wenn der Divisor eines Quotienten eine irrationale Wurzel ist und (vgl. § 68, 6) das Wurzelzeichen aus dem Divisor fortgeschafft, oder, wie man hier auch sagt, der Divisor rational gemacht werden soll, so kann man zuvörderst einen etwa vorhandenen rationalen Faktor absondern; ist dann der Radikand der übrig bleibenden echten irrationalen Wurzel keine Potenz, so hat man unmittelbar nach § 68, 6 zu verfahren; ist er aber eine Potenz (vgl. N. 2), so ist $\frac{a}{\sqrt[d]{b^c}} = \frac{a . \sqrt[d]{b^{d-c}}}{\sqrt[d]{b^c} . \sqrt[d]{b^{d-c}}} = \frac{a . \sqrt[d]{b^{d-c}}}{\sqrt[d]{b^d}} = \frac{a . \sqrt[d]{b^{d-c}}}{b}$. Ist er

endlich ein Produkt, das eine Potenz als Faktor enthält (N. 2), so ist

$$\frac{a}{\sqrt[e]{b^c} \cdot d} = \frac{a \cdot \sqrt[e]{b^{e-c}} \cdot \sqrt[e]{d^{e-1}}}{\sqrt[e]{b^c} \cdot \sqrt[e]{b^{e-c}} \cdot \sqrt[e]{d} \cdot \sqrt[e]{d^{e-1}}}.$$

§ 77.

1. Es ist zwar nach § 66, 3 $\sqrt[2n]{a^{2n}}$ oder $\sqrt[2n]{(+a)^{2n}}$ nur $= a$ oder $+ a$; ebenso ist $\sqrt[2n]{(-a)^{2n}}$ nur $= - a$; weil aber $(-a)^{2n}$ $= a^{2n}$ oder $= (+a)^{2n}$ ist (§ 60, 2), so kann, wenn man $a^{2n} = b$ setzt, $\sqrt[2n]{b}$ ebensowohl die negative Zahl $- a$ als die positive a oder $+ a$ bedeuten; oder, wenn man einerseits unter $\sqrt[2n]{b}$ überhaupt die Wurzel vom Grade 2n aus b, andrerseits nur die Zahl a an sich (oder positiv genommen) versteht, so ist $\sqrt[2n]{b} = \pm \sqrt[2n]{b}$ (d. h. entweder $+ a$ oder $- a$). Jeder eine Wurzel von geradem Exponenten, oder kürzer: eine gerade Wurzel aus einer positiven Zahl darstellende Ausdruck ist demnach ein zweideutiger Ausdruck, d. h. er kann sowohl eine positive als eine negative Zahl bedeuten.

2. Dagegen ist jeder eine ungerade Wurzel aus einer positiven Zahl darstellende Ausdruck wie $\sqrt[2n+1]{a}$ nur eindeutig, und zwar bedeutet er nur eine positive Zahl, weil jede ungerade Potenz einer negativen Zahl negativ ist (§ 60, 3).

3. Ferner ist jeder eine ungerade Wurzel aus einer negativen Zahl darstellende Ausdruck wie $\sqrt[2n+1]{-a}$ ebenfalls nur eindeutig, und zwar bedeutet er nur eine negative Zahl; nach § 20, 4 und 6 und 26, 1 muß nämlich $- a = (-1) \cdot a$ sein; ferner kann nach § 60, 4 für $- 1$ gesetzt werden $(-1)^{2n+1}$; also ist $\sqrt[2n+1]{-a} =$ $\sqrt[2n+1]{(-1)^{2n+1} \cdot a} = (-1) \cdot \sqrt[2n+1]{a} = - \sqrt[2n+1]{a}$ (§ 67, 1; 66, 2; 26, 1).

4. Endlich ist jeder eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl darstellende Ausdruck wie $\sqrt[2n]{-a}$ an sich völlig bedeutungslos, d. h. er kann weder eine positive noch eine negative Zahl vorstellen, da jede gerade Potenz von einer negativen Zahl ebensowohl positiv ist als von einer positiven (§ 60, 2). In Verbindung mit andern Ausdrücken lassen jedoch dergleichen bloß formelle Wurzeln immerhin die Anwendung der gewöhnlichen Rechengesetze zu und können, nach diesen behandelt, zu brauchbaren Ergebnissen führen.

5. Man nennt die eben erwähnten Ausdrücke imaginäre, im Gegensatze der reellen Rechenausdrücke, worunter man die positiven und negativen Zahlen einschließlich der Eins, der Null, der gebrochnen und der Irrational-Zahlen begreift.

§ 78.

1. Die zunächst in Betracht kommenden imaginären Ausdrücke sind die **imaginären Quadratwurzeln**, deren allgemeine Form $\sqrt{-a}$ ist. Von diesen gilt fürs Erste nach § 66, 1 und 2 die Gleichung $(\sqrt{-a})^2 = -a$; insbesondre $(\sqrt{-1})^2 = -1$. Weil ferner $\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{-a}$ von $(\sqrt{-a})^2$ nicht verschieden sein kann (vgl. § 51, 1), so kann auch $\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{-a}$ nur $= -a$ sein, und man darf nicht etwa nach § 67, 2 und 26, 3 schließen wollen, daß $\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{-a}$ auch $= \sqrt{(-a)\,.\,(-a)} = \sqrt{a\,.\,a} = \sqrt{a^2} = a$ sein könne; insbesondre ist $\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1}$ nur $= -1$.

2. Da aber $\sqrt{-a} = \sqrt{(-1)\,.\,a}$ sein muß (§ 20, 4 und 6 und 26, 1), so ist nach § 67, 1 nothwendig $\sqrt{-a} = \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{a}$, und jede imaginäre Quadratwurzel läßt sich sonach in ein Produkt aus der reellen Quadratwurzel des positiv genommenen Radikanden und aus der imaginären Quadratwurzel $\sqrt{-1}$ umformen. Letztere bezeichnet man auch einfacher durch i, so daß $i\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{a}$ bedeutet.

3. Hienach und nach § 22, 2; 24, 2 ist $\sqrt{-a} + \sqrt{-b} = \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{a} + \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{b} = \sqrt{-1}\,.\,(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = i\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ und $\sqrt{-a} - \sqrt{-b} = \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{a} - \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{b} = \sqrt{-1}\,.\,(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = i\,(\sqrt{a} - \sqrt{b})$.

4. Ferner ist $\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{-b} = (\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{a})\,.\,(\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{b}) = (\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1})\,.\,(\sqrt{a}\,.\,\sqrt{b}) = (-1)\,.\,\sqrt{a\,.\,b} = -\sqrt{a\,.\,b}$ (§ 29, 1; 67, 2; 20, 4 und 6; 26, 1).

5. Weiter ist $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \dfrac{\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{a}}{\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{b}} = \dfrac{(\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{a}) : \sqrt{-1}}{\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (§ 38, 2; 32, 2; 68, 2).

6. Wie nach § 51, 3 überhaupt a^1 nur $= a$ sein kann, so auch i^1 nur $= i$; denn es ist $i^1 = \dfrac{i^2}{i} = \dfrac{i\,.\,i}{i}$; ferner ist $i^0 = 1$; denn es ist $i^0 = \dfrac{i^1}{i} = \dfrac{i}{i} = \dfrac{i\,.\,1}{i} = 1$ (§ 20, 6; 32, 2). Sodann ist $i^3 = i^2\,.\,i = (-1)\,.\,i = -i$ (§ 26, 1). Weiter ist $i^4 = i^3\,.\,i = (-i)\,.\,i = -i\,.\,i = -i^2 = -(-1) = 1$ (vgl. § 16, 4, Beispiel 8). Allgemein: wenn n irgend eine eigentliche Zahl oder auch 1 oder 0 bedeutet, so ist $i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$; $i^{4n+1} = i^{4n}\,.\,i^1 = 1\,.\,i = i$; $i^{4n+2} = i^{4n}\,.\,i^2 = 1\,.\,(-1) = -1$; $i^{4n+3} = i^{4n}\,.\,i^3 = 1\,.\,(-i) = -i$. Hienach ist dann auch $(\sqrt{-a})^{4n} = (i\sqrt{a})^{4n} = i^{4n}\,.\,(\sqrt{a})^{4n} = 1\,.\,(\sqrt{a})^{4n} = (\sqrt{a})^{4n}$ u. s. f.

§ 79.

1. Es ist $\sqrt{-a} \cdot b = (\sqrt{-1} \cdot \sqrt{a}) \cdot b = \sqrt{-1} \cdot (\sqrt{a} \cdot b)$ und ebenso $\frac{\sqrt{-a}}{b} = \frac{\sqrt{-1} \cdot \sqrt{a}}{b} = \sqrt{-1} \cdot \frac{\sqrt{a}}{b}$ (§ 28, 1; 37, 1).

2. Dagegen ist $\frac{a}{\sqrt{-b}} = \frac{a}{\sqrt{-1} \cdot \sqrt{b}} = -\sqrt{-1} \cdot \frac{a}{\sqrt{b}}$; denn es ist nothwendig einerseits $\frac{a}{\sqrt{-b}} \cdot \sqrt{-b} = a$, andrerseits $\left(-\sqrt{-1} \cdot \frac{a}{\sqrt{b}}\right)(\sqrt{-1} \cdot \sqrt{b}) = -(\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}) \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b}\right) = -(-1) \cdot a = a$ (§ 32, 2; 26, 1; 16, 4; 31, 2). Setzt man hierin $b = 1$, so folgt $\frac{a}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1} \cdot \frac{a}{\sqrt{1}}$ $= -\sqrt{-1} \cdot \frac{a}{1} = -\sqrt{-1} \cdot a$ (vgl. § 66, 3; 32, 4).

3. Besonders häufig kommen Ausdrücke von der Form $a + b\sqrt{-1}$ und $a - b\sqrt{-1}$ vor. Sind dergleichen Ausdrücke durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division zu verbinden, so läßt sich das Ergebniß immer auf dieselbe Form bringen, welche die einzelnen Ausdrücke haben. Es ist z. B.

1) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;

2) $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$;

3) $(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$;

4) $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2 i^2}$
$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$.

4. Wenn zwei solche Ausdrücke sich bloß durch das Vorzeichen desjenigen Gliedes, welches den imaginären Faktor enthält, unterscheiden; wenn also der eine z. B. $a + bi$, der andre $a - bi$ ist, so nennt man sie **konjugirte Ausdrücke**. Hier ist nun z. B.

1) $(a + bi) + (a - bi) = 2a$;

2) $(a + bi) - (a - bi) = 2bi$;

3) $(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$;

4) $\frac{a + bi}{a - bi} = \frac{(a + bi)^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2 + 2abi}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2} i$;

5) $\frac{a - bi}{a + bi} = \frac{(a - bi)^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2 - 2abi}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{2ab}{a^2 + b^2}\, i.$

§ 80.

1. Gleiches mit Gleichem radicirt giebt Gleiches. Ist $a = b$, so ist auch $\sqrt[c]{a} = \sqrt[c]{b}$ und $\sqrt[a]{c} = \sqrt[b]{c}$ (vgl. § 5, 4). Indessen darf dies natürlich nicht auf Wurzeln von verschiednem Vorzeichen, die sich bei geradem Exponenten und positivem Radikanden ergeben können (§ 77, 1), ausgedehnt werden.

2. Umgekehrt: wenn $\sqrt[c]{a} = \sqrt[c]{b}$, so ist nach § 65, 1 $\left(\sqrt[c]{a}\right)^c = \left(\sqrt[c]{b}\right)^c$ d. h. $a = b$. Ferner: wenn $\sqrt[a]{c} = \sqrt[b]{c}$, so folgt aus $\left(\sqrt[a]{c}\right)^a = \left(\sqrt[b]{c}\right)^b$ nach § 65, 3, daß $a = b$.

Zweites Buch.

Erstes Kapitel. Das Zahlen- und Ziffern-System.

§ 81.

1. Jede Zahl im eigentlichsten Sinne des Wortes (§ 3, 2), die größer als eine andre z ist, läßt sich in Form einer Summe wie

$$a z^0 + b z^1 + c z^2 + d z^3 + \ldots + x z^y$$

darstellen, wo man unter a, b, c u. s. f. eigentliche Zahlen, die $< z$ sind, oder auch 1 oder 0 zu verstehn hat und x ebenfalls eine eigentliche Zahl, die $< z$ ist, oder auch 1 (aber nicht 0) bedeutet. Denn jede Zahl, die $> z$, ist entweder ein Vielfaches von z oder die Summe eines solchen Vielfachen (mit Einschluß des Einfachen) und eines Restes der Division (§ 43, 3), der $< z$; sie kann demnach in beiden Fällen unter der allgemeinen Form $Az + a$ dargestellt werden, nur daß im ersten Falle $a = 0$ ist, im zweiten aber a eine eigentliche Zahl, die $< z$ ist, oder 1 vorstellt. Ist nun wieder $A > z$, so kann man in gleicher Weise setzen $A = Bz + b$; ist auch $B > z$, so kann man setzen $B = Cz + c$; ebenso $C = Dz + d$ u. s. f. Dann ist also die gegebene Zahl $= Az + a = (Bz + b)z + a = Bz^2 + bz + a = (Cz + c)z^2 + bz + a = Cz^3 + cz^2 + bz + a = (Dz + d)z^3 + cz^2 + bz + a = Dz^4 + dz^3 + cz^2 + bz + a$ u. s. f. Nun ist aber $A > B$ (§ 9, 2; 30), ebenso $B > C$, $C > D$ u. s. f.; man wird also endlich auf einen Ausdruck $Wz + w$ kommen, worin W nicht

mehr $>$ z (oder auch $=$ z), sondern $<$ z ist; setzt man demgemäß anstatt W nach Analogie von a, b, c u. s. f. den Kleinbuchstaben x, so erhält der ganze Ausdruck die Form

$$x z^y + w z^{y-1} + \ldots + e z^4 + d z^3 + c z^2 + b z + a$$

oder in umgekehrter Ordnung wie oben

$$a z^0 + b z^1 + c z^2 + d z^3 + e z^4 + \ldots + w z^{y-1} + x z^y.$$

Der Exponent y bedeutet die Zahl, welche um 1 kleiner ist als die Anzahl der Summenglieder oder als die Zahl, welche angiebt, das wievielte Glied $x z^y$ ist, wenn man $a z^0$ als das erste betrachtet.

2. Hat man daher für die zwischen 1 und z liegenden Glieder der Zahlenreihe sowie für Eins und Null bestimmte einfache Zeichen, Zahlzeichen, Ziffern (§ 3, 3), so kann man durch bloße Zusammensetzung dieser Zeichen alle Zahlen, die $>$ z sind, nach N. 1 darstellen. Man braucht nur die Buchstaben a, b, c u. s. f. durch solche bestimmte Zahlzeichen zu ersetzen, indem man die Potenzen von z wegläßt, da diese schon durch die Reihenfolge der Glieder angedeutet sind; auch die Additionszeichen können nach Uebereinkunft wegbleiben.

3. Die Zahl z selbst kann ebenfalls durch einen solchen Ausdruck dargestellt werden, da sie $= 0 z^0 + 1 z^1$ ist; ebenso ist $z^2 = 0 z^0 + 0 z^1 + 1 z^2$, ferner $z^3 = 0 z^0 + 0 z^1 + 0 z^2 + 1 z^3$ u. s. f., und man kann somit jede Potenz von z durch 1 mit so vielen Nullen als der Exponent angiebt bezeichnen.

4. Wollte man für z die Zahl Zwei nehmen, so bedürfte man hienach sonst keine Ziffern als 0 und 1, um Zwei selbst und alle folgenden Zahlen auszudrücken.

§ 82.

1. Die Art, wie man durch wenige bestimmte Zahlzeichen und durch Zusammenstellung derselben alle Zahlen nach einem allgemeingültigen Gesetze darstellt, heißt überhaupt das Ziffernsystem; namentlich aber versteht man hierunter die in § 81 entwickelte Art der Zahlendarstellung. Die hiebei zu Grunde liegende Zahl z nennt man die Grundzahl des Ziffernsystems, und je nachdem sie Zwei oder Zehn oder eine andre ist, unterscheidet man ein dyadisches, ein dekadisches Ziffernsystem u. s. f.

2. Die Anzahl der Ziffern, deren man nach dem in § 81 entwickelten Ziffernsystem bedarf, ist immer der Grundzahl gleich, da zwar für diese selbst kein Zeichen nöthig ist, dagegen aber eins für die Null (vgl. § 81, 3 und 4).

3. Die Stellen, welche die Summenglieder, mithin die Ziffern in der Zusammensetzung einnehmen, nennt man auch Ordnungen, pflegt sie aber nach den Potenzexponenten von z zu zählen, so daß die von z^0 eingenommene erste Stelle vielmehr die nullte Ordnung und die an dieser Stelle befindliche Ziffer die Ziffer der nullten Ordnung heißt u. s. f.

4. Als solche Ziffern der nullten Ordnung sind die Ziffern auch anzusehen, wenn sie, einzeln dastehend, ihrer Urbedeutung gemäß Zahlen

darstellen, die kleiner als z sind; da jede solche Zahl als ein Produkt aus ihr selbst und aus z^0 d. h. 1 angesehen werden kann, z. B. 2 als 2 z^0.

5. Uebrigens nennt man auch die Zahlen, die mit einer Ziffer oder mit zwei, drei Ziffern u. s. f. geschrieben werden, bezüglich Zahlen der nullten, ersten, zweiten Ordnung u. s. f.

§ 83.

1. Die Nothwendigkeit eines Ziffernsystems folgt (vgl. § 3, 1) aus der Unmöglichkeit, für jedes Glied der endlosen Zahlenreihe ein eigenes Zeichen aufzustellen und im Gedächtnisse zu behalten. Soll aber das Ziffernsystem den ganzen Nutzen leisten, den es leisten kann, so muß es sich dem Zahlensysteme vollkommen anschließen, d. h. jenem Gesetze, nach welchem die Sprache, nur wenige Glieder der Zahlenreihe durch eigene Wörter bezeichnend, alle übrigen Zahlen durch abgeleitete und zusammengesetzte Wörter, die jenen wenigen einfachen entstammen, ausdrückt und so der Unmöglichkeit begegnet, für jedes Glied der endlosen Zahlenreihe ein eignes Wort zu schaffen.

2. Dieses Gesetz ist aber in allen bekannteren Sprachen, abgesehen von einigen Besonderheiten, im Allgemeinen folgendes, daß es nur für Null, Eins und die eigentlichen Zahlen bis zu Zehn, dann für einige Potenzen von Zehn, nämlich die zweite = Hundert, die dritte = Tausend, die sechste = eine Million, die 12te = (6. 2)te = eine Billion, die 18te = (6. 3)te = eine Trillion u. s. f. für die (6. n)ten Potenzen selbständige Wortausdrücke giebt, während die Ausdrücke für alle übrigen Zahlen diese theils als Vielfache von Potenzen der Zehn, theils als Summen aus solchen Potenzen und Potenzvielfachen und aus den kleineren Zahlen bis zu Zehn erscheinen lassen. Sonach liegt dem Zahlensystem ganz die in § 81 und 82 erörterte Art der Zahlendarstellung zu Grunde, mit der näheren Bestimmung, daß unter z die Zahl Zehn zu verstehn ist.

3. Demgemäß erscheint das in § 81 und 82 erörterte Ziffernsystem überhaupt, und insbesondre das dekadische Ziffernsystem (§ 82, 1) als das angemessenste. Bekanntlich ist es auch das fast ausschließlich angewandte bei allen civilisirteren Völkern der Gegenwart. So wie es nun einmal ins Leben eingeführt ist, läßt man übrigens die Ordnungen der Ziffern von der Rechten zur Linken auf einander folgen.

§ 84.

1. Nach Analogie der systematischen Bezeichnung der ganzen Zahlen kann auch jeder Bruch, dessen Nenner die Grundzahl z des Ziffernsystems oder irgend eine Potenz von z ist, mit Weglassung des Nenners so geschrieben werden, daß man im Zähler, von der Rechten zur Linken zählend, so viele Stellen durch ein Komma (weniger passend durch einen Punkt) absondert als der Potenzexponent des Nenners angiebt; hat der Zähler nur gerade so viel Stellen, so setzt man vor das Komma zur Linken noch eine Null; hat endlich der Zähler weniger

Stellen, so setzt man links vor die Ziffern des Zählers erst so viele Nullen als der Unterschied zwischen dem Potenzexponenten des Nenners und der Stellenzahl des Zählers beträgt, dann das Komma, endlich vor dieses noch eine Null. Nach allem Bisherigen ist nämlich der systematische Zahlenausdruck $123 = 1\,z^2 + 2\,z^1 + 3\,z^0$, also muß $\frac{123}{z} = \frac{1\,z^2}{z^1} + \frac{2\,z^1}{z^1} + \frac{3\,z^0}{z^1} = 1\,z^{2-1} + 2\,z^{1-1} + 3\,z^{0-1} = 1\,z^1 + 2\,z^0 + 3\,z^{0-1} = 12 + 3\,z^{-1}$ sein; setzt man nun fest, daß, sobald die von z^0 eingenommene Stelle durch ein nach derselben zur Rechten folgendes Komma ausgezeichnet ist, eine auf dieses Komma zur Rechten folgende Ziffer 3 ebenso $3\,z^{-1}$ bedeuten solle, wie z. B. hier 1 so viel als $1\,z^1$, 2 so viel als $2\,z^0$ ist, so kann man den Ausdruck $\frac{123}{z} = 12 + 3\,z^{-1}$ auch so schreiben: 12, 3. Ferner ist z. B. $\frac{45}{z^2}$ so viel als $\frac{4\,z^1 + 5\,z^0}{z^2}$ oder auch $\frac{0\,z^2 + 4\,z^1 + 5\,z^0}{z^2}$, mithin $= 0\,z^{2-2} + 4\,z^{1-2} + 5\,z^{0-2} = 0z^0 + 4\,z^{-1} + 5\,z^{-2}$; nach Analogie alles Bisherigen kann man also für $\frac{45}{z^2}$ auch schreiben: 0, 45. Endlich ist z. B. $\frac{6}{z^3}$ so viel als $\frac{6\,z^0}{z^3}$ oder auch $\frac{0\,z^3 + 0\,z^2 + 0\,z^1 + 6\,z^0}{z^3}$, somit $= 0\,z^{3-3} + 0\,z^{2-3} + 0\,z^{1-3} + 6\,z^{0-3} = 0\,z^0 + 0\,z^{-1} + 0\,z^{-2} + 6\,z^{-3}$; demnach kann man für $\frac{6}{z^3}$ auch schreiben: 0, 006.

2. Brüche, deren Nenner die Grundzahl des Ziffernsystems oder irgend eine Potenz derselben ist, heißen, insoferne sie auf vorstehende Art ausgedrückt werden, systematische Brüche, namentlich aber Decimalbrüche, wenn z die Zahl Zehn bedeutet. Das Komma, wodurch man die von z^0 eingenommene Stelle kenntlich macht, nennt man den Decimalstrich; die von diesem Komma aus nach rechts folgenden Ziffern heißen Decimalziffern der ersten, zweiten, dritten Ordnung u. s. f. (eigentlich sollte man nach Analogie von § 82, 3 sagen: Ziffern der (—1)ten, (—2)ten, (—3)ten Ordnung u. s. f.); auch nennt man sie selbst Decimalstellen oder kürzer Decimalen.

§ 85.

1. Alle bisher besprochnen systematischen Zahlenausdrücke gehören zu den in § 63 erörterten Ausdrücken; sie sind nach Potenzen und zwar fallenden Potenzen der Grundzahl des Ziffernsystems geordnete Summen, mit den besondren Bestimmungen: erstens, daß die Koefficienten der Potenzen nur ganze Zahlen und zwar kleiner als die Grundzahl, und zweitens: daß alle Summenglieder positiv sind.

2. In diesen systematischen Zahlenausdrücken ist jedes Summenglied, soferne der Koefficient der Potenz nicht Null ist, größer als die

Summe aller rechts auf dasselbe folgenden Glieder. Denn es ist z. B. in $d z^3 + c z^2 + b z^1 + a z^0$ sowohl c als b als a, wenn auch noch so groß, doch keinenfalls größer als $z - 1$; also ist auch keinenfalls $c z^2 + b z^1 + a z^0 > (z - 1) z^2 + (z - 1) z^1 + (z - 1) z^0$ d. h. $> z^3 - z^2 + z^2 - z^1 + z - 1$ oder $> z^3 - 1$; wäre nun d auch so klein als es, ohne Null zu werden, sein kann, d. h. nur $= 1$, so wäre doch $d z^3$, weil $> z^3 - 1$, auch jedenfalls $> c z^2 + b z^1 + a z^0$. Ebenso ist $1 z^0 > (z - 1) z^{-1} + (z - 1) z^{-2} + (z - 1) z^{-3}$ u. s. f. ins Unendliche, weil diese Summe $= z^0 - z^{-1} + z^{-1} - z^{-2} + z^{-2} - z^{-3} \ldots$, worin jedes Glied außer dem ersten und letzten doppelt vorhanden, aber einmal negativ und das andremal positiv ist, so daß die Summe immer auf eine Differenz wie z. B. $z^0 - z^{-3}$ zurückkommt, die $< z^0$ ist. Und aus gleichen Gründen ist $1 z^{-1} > (z - 1) z^{-2} + (z - 1) z^{-3} \ldots$ und $1 z^{-2} > (z - 1) z^{-3} + (z - 1) z^{-4} \ldots$ u. s. f.

§ 86.

1. Alle vorstehend erörterten Ziffern- oder numerischen Ausdrücke werden, wenn sie mit andren dergleichen oder mit Buchstaben-Ausdrücken zu Ausdrücken für Summen, Differenzen, Produkten, Quotienten, Potenzen, Wurzeln mittels der entsprechenden Bezeichnung oder Stellung verbunden sind, als einfache Ausdrücke behandelt, somit nicht in Klammern eingeschlossen; man schreibt z. B., wiewohl $23 = 2 z^1 + 3 z^0$ ist, doch nicht $(23) \,.\, 4$ oder $(23) \,.\, a$, sondern $23 \,.\, 4$ oder $23 \,.\, a$; ebenso nicht $(23)^4$ oder $(23)^a$, sondern 23^4, 23^a.

2. Dagegen findet die Weglassung des Multiplikationszeichens zwar auch dann noch statt, wenn der eine Faktor in Ziffern, der andre durch Buchstaben ausgedrückt ist, in welchem Falle man jedoch den Ziffernausdruck voranzustellen, demselben auch die Benennung Koefficient (vgl. § 63, 1) zu geben pflegt; wenn aber beide Faktoren numerisch ausgedrückt sind, so darf das Multiplikationszeichen nicht fehlen, da man z. B. unter 23 keineswegs das Produkt $2 \,.\, 3$, sondern die Summe $2 z^1 + 3 z^0$ versteht.

3. Bei gemischten Zahlen (§ 43, 3), wenn sie in Ziffern ausgedrückt sind, bleibt das Additionszeichen zwischen der ganzen Zahl und dem Ergänzungsbruche weg; man schreibt z. B. bloß $2\frac{3}{4}$ statt $2 + \frac{3}{4}$, ohne daß jenes etwa als $2 \,.\, \frac{3}{4}$ verstanden würde (vgl. N. 2).

Zweites Kapitel. Numerische Addition, Subtraktion, Multiplikation.

§ 87.

1. Das numerische Addiren besteht darin, daß man aus den gegebenen Zifferausdrücken zweier oder mehrerer Zahlen den Ziffernausdruck für die Summe derselben herleitet. Es ist dabei vor allem nöthig, daß man die Summe, welche jede von den Zahlen, die kleiner als die Grundzahl des Ziffernsystems sind und demgemäß mit einer Ziffer geschrieben werden, mit jeder andren einziffrigen Zahl giebt, einfürallemal sich einpräge (das Eins und Eins auswendiglerne), und so auch den Ziffernausdruck dieser Summe. Hat man nun z. B. eine zweiziffrige Zahl 53 und eine dreiziffrige 472 zu addiren, so ist die Summe $= (5z^1 + 3z^0) + (4z^2 + 7z^1 + 2z^0) = 4z^2 + (5+7)z^1 + (3+2)z^0$. Wenn nun unter z die Zahl Zehn verstanden wird, so ergiebt sich aus dem Eins und Eins, daß 3 + 2 oder, wie man gewöhnlich rechnet, $2 + 3 = 5$, $7 + 5 = 12 = 1z^1 + 2z^0$. Obige Summe ist also $= 4z^2 + (1z^1 + 2z^0)z^1 + 5z^0 = 4z^2 + (1z^2 + 2z^1) + 5z^0 = (4+1)z^2 + 2z^1 + 5z^0$, oder, da nach dem Eins und Eins $1 + 4 = 5$ ist, $= 5z^2 + 2z^1 + 5z^0 = 525$. Oder wenn 53 und 472 und 6987 addirt werden sollten, so wäre dies $= (5z^1 + 3z^0) + (4z^2 + 7z^1 + 2z^0) + (6z^3 + 9z^2 + 8z^1 + 7z^0) = 6z^3 + (4+9)z^2 + (5+7+8)z^1 + (3+2+7)z^0$; hier ist nun zunächst $7 + 2 = 9$, $9 + 3 = 12 = 1z^1 + 2z^0$, mithin $(3+2+7)z^0 = (1z^1 + 2z^0)z^0 = 1z^1 + 2z^0$ und die ganze Summe $= 6z^3 + (4+9)z^2 + (5+7+8+1)z^1 + 2z^0$; ferner ist $1 + 8 = 9$, $9 + 7 = 16 = 1z^1 + 6z^0$, $16 + 5 = (1z^1 + 6z^0) + 5z^0 = 1z^1 + (6+5)z^0 = 1z^1 + 11z^0 = 1z^1 + (1z^1 + 1z^0)z^0 = 1z^1 + (1z^1 + 1z^0) = 2z^1 + 1z^0$, also $(5+7+8+1)z^1 = (2z^1 + 1z^0)z^1 = 2z^2 + 1z^1$ und die ganze Summe $= 6z^3 + (4+9+2)z^2 + 1z^1 + 2z^0$; weiter ist $2 + 9 = 11 = 1z^1 + 1z^0$, $11 + 4 = (1z^1 + 1z^0) + 4z^0 = 1z^1 + (1+4)z^0 = 1z^1 + 5z^0$, also $(4+9+2)z^2 = (1z^1 + 5z^0)z^2 = 1z^3 + 5z^2$ und die ganze Summe $= (6+1)z^3 + 5z^2 + 1z^1 + 2z^0$; endlich ist $1 + 6 = 7$, also die ganze Summe $= 7z^3 + 5z^2 + 1z^1 + 2z^0 = 7512$.

2. Vorstehendes genügt zur strengwissenschaftlichen Begründung des beim numerischen Addiren gewöhnlich angewendeten Verfahrens; übrigens kann es sich hier (vgl. § 4, 1) nur um jene handeln; das Verfahren selbst ist als vom ersten Rechenunterrichte her schon bekannt vorauszusetzen.

§ 88.

Das numerische Subtrahiren besteht darin, daß man aus den Ziffernausdrücken zweier Zahlen den Ziffernausdruck für ihre Differenz herleitet. Hiezu ist vor allem wieder die Kenntniß des Eins und

Eins (§ 87, 1) nöthig. Soll nun z. B. 65 von 748 subtrahirt werden, so ist dies $= (7\,z^2 + 4\,z^1 + 8\,z^0) - (6\,z^1 + 5\,z^0) = 7\,z^2 + (4 - 6)\,z^1 + (8 - 5)\,z^0$. Nach dem Eins und Eins ist aber $5 + 3 = 8$, folglich $8 - 5 = 3$ und $(8 - 5)\,z^0 = 3\,z^0$. Der Koefficient von z^1 ist eine negative Differenz; da nun aber (§ 85, 1) in diesen systematischen Zahlenausdrücken alle Summenglieder positiv sein müssen, so hat man folgende Umformung vorzunehmen. Für $7\,z^2$ kann man auch setzen $(6 + 1)\,z^2 = 6\,z^2 + z^2 = 6\,z^2 + z^1\,z^1$, wodurch die ganze Differenz übergeht in $6\,z^2 + (z^1 + 4 - 6)\,z^1 + 3\,z^0$; nun ist $z^1 + 4 = 1\,.\,z^1 + 4\,z^0 = 14$ und nach dem Eins und Eins ist $6 + 8 = 14$, also $z^1 + 4 - 6 = 8$; so daß die ganze Differenz $= 6\,z^2 + 8\,z^1 + 3\,z^0 = 683$ ist. Oder wenn 965 von 3748 subtrahirt werden sollte, so wäre dies $= (3\,z^3 + 7\,z^2 + 4\,z^1 + 8\,z^0) - (9\,z^2 + 6\,z^1 + 5\,z^0) = 3\,z^3 + (7 - 9)\,z^2 + (4 - 6)\,z^1 + (8 - 5)\,z^0$, und ganz auf dieselbe Weise wie im vorigen Beispiel erhielte man vorerst $3\,z^3 + (6 - 9)\,z^2 + 8\,z^1 + 3\,z^0$, und weiter, da auch $6 - 9$ eine negative Differenz ist, $(2 + 1)\,z^3 + (6 - 9)\,z^2 + 8\,z^1 + 3\,z^0 = 2\,z^3 + z^1\,z^2 + (6 - 9)\,z^2 + 8\,z^1 + 3\,z^0 = 2\,z^3 + (z^1 + 6 - 9)\,z^2 + 8\,z^1 + 3\,z^0$, oder, da $z^1 + 6 = 1\,z^1 + 6\,z^0 = 16$ und nach dem Eins und Eins $9 + 7 = 16$, somit $z^1 + 6 - 9 = 7$ ist, so ist die ganze Differenz $= 2\,z^3 + 7\,z^2 + 8\,z^1 + 3\,z^0 = 2783$.

§ 89.

1. Das numerische Multipliciren besteht darin, daß man aus den Ziffernausdrücken zweier Zahlen den Ziffernausdruck für ihr Produkt ableitet. Zu dem Ende muß man vor allem das Produkt, welches jede einziffrige Zahl mit jeder andern einziffrigen Zahl giebt, einfürallemal sich einprägen (das Ein mal Eins auswendiglernen), und so auch den Ziffernausdruck dieses Produktes. Hat man nun eine mehrziffrige Zahl und eine einziffrige mit einander zu multipliciren, z. B. 6532 und 4, so ist dies $= (6\,z^3 + 5\,z^2 + 3\,z^1 + 2\,z^0)\,.\,(4\,z^0) = 24\,z^3 + 20\,z^2 + 12\,z^1 + 8\,z^0$; da aber in diesen systematischen Zahlenausdrücken kein Koefficient $= z$ oder $> z$ sein darf (§ 85, 1), so muß mit den Koefficienten von z^1, z^2 und z^3 eine Umformung vorgenommen werden. Es ist aber $12\,z^1 = (1\,z^1 + 2\,z^0)\,z^1 = 1\,z^2 + 2\,z^1$, wodurch der Ausdruck für das ganze Produkt zunächst übergeht in $24\,z^3 + (20 + 1)\,z^2 + 2\,z^1 + 8\,z^0$; weiter ist $20 + 1 = 21 = 2\,z^1 + 1\,z^0$, also $(20 + 1)\,z^2 = (2\,z^1 + 1\,z^0)\,z^2 = 2\,z^3 + 1\,z^2$, somit der Ausdruck für das ganze Produkt $(24 + 2)\,z^3 + 1\,z^2 + 2\,z^1 + 8\,z^0$; endlich ist $24 + 2 = 26 = 2\,z^1 + 6\,z^0$ und $(24 + 2)\,z^3 = (2\,z^1 + 6\,z^0)\,z^3 = 2\,z^4 + 6\,z^3$ und der Ausdruck für das ganze Produkt $= 2\,z^4 + 6\,z^3 + 1\,z^2 + 2\,z^1 + 8\,z^0 = 26128$. Hat man ferner eine mehrziffrige Zahl mit einer mehrziffrigen zu multipliciren, z. B. 23 und 943, so ist dies $= (2\,z^1 + 3\,z^0)\,.\,(9\,z^2 + 4\,z^1 + 3\,z^0) = (2\,z^1 + 3\,z^0)\,.\,(9\,z^2) + (2\,z^1 + 3\,z^0)\,.\,(4\,z^1) + (2\,z^1 + 3\,z^0)\,.\,(3\,z^0)$; von letzteren drei Produkten ist das eine $(2\,z^1 + 3\,z^0)\,.\,(3\,z^0) = 6\,z^1 + 9\,z^0$, das andre $(2\,z^1 + 3\,z^0)\,.\,(4\,z^1) = 9\,z^2 + 2\,z^1$, das dritte $(2\,z^1 + 3\,z^0)\,.\,(9\,z^2) = 2\,z^4 + 0\,z^3 + 7\,z^2$, und indem man

diese drei Produkte addirt ergiebt sich für das ganze Produkt der gegebenen Zahlen $(6z^1 + 9z^0) + (9z^2 + 2z^1) + (2z^4 + 0z^3 + 7z^2)$ oder $(6z^1 + 9z^0) + (9z^2 + 2z^1 + 0z^0) + (2z^4 + 0z^3 + 7z^2 + 0z^1 + 0z^0)$ oder $69 + 920 + 20700 = 2z^4 + 1z^3 + 6z^2 + 8z^1 + 9z^0 = 21689$.

2. Wenn der eine Faktor die Grundzahl des Ziffernsystems oder eine Potenz derselben ist, so ergiebt sich der Ausdruck des Produktes unmittelbar, wenn man dem Ausdrucke des andren Faktors zur Rechten so viele Nullen anfügt als der Ausdruck jener Potenz enthält (also eine Null, wenn die Potenz die erste d. h. die Grundzahl selbst ist, vgl. § 81, 3). Denn es ist z. B. $43 \,.\, 10 = (4z^1 + 3z^0) \,.\, (1z^1 + 0z^0) = (4z^1 + 3z^0) \,.\, (1z^1) + (4z^1 + 3z^0) \,.\, (0z^0)$; nun ist dieses letzte Produkt $= (4 \,.\, 0)z^1 + (3 \,.\, 0)z^0 = 0z^1 + 0z^0$, das andre aber ist $= (4 \,.\, 1)z^2 + (3 \,.\, 1)z^1 = 4z^2 + 3z^1$, mithin ihre Summe $= 4z^2 + (3 + 0)z^1 + 0z^0 = 4z^2 + 3z^1 + 0z^0 = 430$. Wenn daher die beiden gegebenen Faktoren Potenzen von z sind, so ist der Ziffernausdruck ihres Produktes eine 1 mit so vielen Nullen als die Ziffernausdrücke der Faktoren zusammen enthalten, z. B. $10 \,.\, 100$ ist $= 1000$; übrigens folgt dies nach § 81, 3 auch schon daraus, daß allgemein $z^a \,.\, z^b = z^{a+b}$ ist.

3. Hienach kann man umgekehrt z. B. 2600 betrachten als $= 26 \,.\, 100$; soll nun 2600 etwa mit 15 multiplicirt werden, so ist dies $= (26 \,.\, 100) \,.\, 15 = (26 \,.\, 15) \,.\, 100$, d. h. man kann zunächst 26 und 15 nach N. 1 mit einander multipliciren und dann das Produkt mit 100 nach N. 2. Ebenso: wenn 2600 mit 150 multiplicirt werden sollte, so wäre dies $= (26 \,.\, 100) \,.\, (15 \,.\, 10) = (26 \,.\, 15) \times (100 \,.\, 10)$.

Drittes Kapitel. Numerische Division.

§ 90.

1. Das numerische Dividiren besteht darin, daß man aus den Ziffernausdrücken zweier Zahlen den Ziffernausdruck ihres Quotienten herleitet. Hiezu bedarf man vor allem wieder die Kenntniß des Ein mal Eins (§ 89, 1). Soll nun eine mehrziffrige Zahl durch eine einziffrige dividirt werden, z. B. 68124 durch 3, so ist dies $= \frac{6z^4 + 8z^3 + 1z^2 + 2z^1 + 4z^0}{3z^0} = \frac{6}{3}z^4 + \frac{8}{3}z^3 + \frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{3}z^1 + \frac{4}{3}z^0$; hier ist der Koefficient $\frac{6}{3}$ eine ganze Zahl, nämlich 2, da nach dem Ein mal Eins $3 \,.\, 2 = 6$; aber der Koefficient $\frac{8}{3}$ ist keine ganze Zahl, da 8 kein Vielfaches von 3, folglich muß ge-

mäß § 85, 1 eine Umformung vorgenommen werden. Nun ist 6 das nächstkleinere Vielfache von 3, und $\frac{8}{3} = \frac{6+2}{3}$ (vgl. § 43, 3), somit $\frac{8}{3} z^3 = \frac{6+2}{3} z^3 = \frac{6}{3} z^3 + \frac{2}{3} z^3 = 2 z^3 + \frac{2 z^1}{3} z^2$, wodurch der Ausdruck für den Quotienten der gegebenen Zahlen übergeht in $2 z^4 + 2 z^3 + \left(\frac{2 z^1}{3} + \frac{1}{3}\right) z^2 + \frac{2}{3} z^1 + \frac{4}{3} z^0$. Weiter ist $\frac{2 z^1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2 z^1}{3} + \frac{1 z^0}{3} = \frac{2 z^1 + 1 z^0}{3} = \frac{21}{3} = 7$ (da $3 \,.\, 7 = 21$); also erhält man $2 z^4 + 2 z^3 + 7 z^2 + \frac{2}{3} z^1 + \frac{4}{3} z^0$. Für den gebrochnen Koefficienten $\frac{2}{3}$ ist zu setzen $\frac{3 \,.\, 0 + 2}{3} = \frac{0 + 2}{3}$, somit wird $\frac{2}{3} z^1$ zu $\frac{0+2}{3} z^1 = \frac{0}{3} z^1 + \frac{2}{3} z^1 = 0 z^1 + \frac{2 z^1}{3} z^0$, und der gesuchte Quotientenausdruck ist $= 2 z^4 + 2 z^3 + 7 z^2 + 0 z^1 + \left(\frac{2 z^1}{3} + \frac{4}{3}\right) z^0 = 2 z^4 + 2 z^3 + 7 z^2 + 0 z^1 + \left(\frac{2 z^1 + 4 z^0}{3}\right) z^0 = 2 z^4 + 2 z^3 + 7 z^2 + 0 z^1 + \left(\frac{24}{3}\right) z^0$ oder (da $3 \,.\, 8 = 24$) $= 2 z^4 + 2 z^3 + 7 z^2 + 0 z^1 + 8 z^0 = 22708$.

2. Das bekannte Verfahren, nach welchem eine mehrziffrige Zahl durch eine mehrziffrige dividirt wird, weicht von Vorstehendem etwas ab und beruht auf Folgendem. Es ist z. B. $\frac{10488}{23} = \frac{1 z^4 + 0 z^3 + 4 z^2 + 8 z^1 + 8 z^0}{2 z^1 + 3 z^0}$. Man dividirt nun, von der Linken zur Rechten gezählt, das erste Glied des Dividenden, also das die höchste Potenz von z enthaltende, durch das erste Glied des Divisors, multiplicirt mit dem Quotienten den ganzen Divisor und subtrahirt dies Produkt vom Dividenden. Wenn aber, wie in diesem Beispiel, der Quotient einen echten Bruch als Koefficienten erhalten würde, da $\frac{1 z^4}{2 z^1} = \frac{1}{2} z^3$, so muß man das erste und zweite Glied des Dividenden so zusammenziehen, daß man $1 z^4 + 0 z^3 = 1 z \,.\, z^3 + 0 z^3 = (1 z + 0) z^3 = (1 z^1 + 0 z^0) z^3 = 10 z^3$ setzt; alsdann ist $10 z^3$ durch $2 z^1$ zu dividiren. Hiebei ergiebt sich $\frac{10}{2} z^2 = 5 z^2$; multiplicirt man aber mit diesem Quotienten den ganzen Divisor, so erhält man $10 z^3 + 15 z^2 = (1 z^1 + 0 z^0) z^3 + (1 z^1 + 5 z^0) z^2 = (1 z^4 + 0 z^3) + (1 z^3 + 5 z^2) = 1 z^4 + (0 + 1) z^3 + 5 z^2 = 1 z^4 +$

$1z^3 + 5z^2$, und dies kann vom Dividenden $1z^4 + 0z^3 + 4z^2 + 8z^1 + 8z^0$ nicht subtrahirt werden (vgl. außer § 88 auch § 85, 2). Man multiplicirt also den Divisor versuchsweise, statt mit $5z^2$, mit $4z^2$, dadurch ergiebt sich $8z^3 + 12z^2 = 8z^3 + (1z^1 + 2z^0)z^2 = 8z^3 + (1z^3 + 2z^2) = (8+1)z^3 + 2z^2 = 9z^3 + 2z^2$; dies vom Dividenden subtrahirt giebt $(10 - 9)z^3 + (4 - 2)z^2 + 8z^1 + 8z^0 = 1z^3 + 2z^2 + 8z^1 + 8z^0$, oder es ist der Dividend $= (2z^1 + 3z^0) . (4z^2) + (1z^3 + 2z^2 + 8z^1 + 8z^0)$. Weiter ist $\frac{1z^3 + 2z^2 + 8z^1 + 8z^0}{2z^1 + 3z^0} = \frac{12z^2 + 8z^1 + 8z^0}{2z^1 + 3z^0}$; hier ist $\frac{12z^2}{2z^1} = 6z^1$; multiplicirt man aber hiemit den ganzen Divisor, so ergiebt sich $12z^2 + 18z^1 = 1z^3 + 3z^2 + 8z^1$, was von $1z^3 + 2z^2 + 8z^1 + 8z^0$ nicht subtrahirt werden kann; man multiplicirt also den Divisor versuchsweise, statt mit $6z^1$, mit $5z^1$, wodurch man erhält $10z^2 + 15z^1 = 1z^3 + 1z^2 + 5z^1$, und dies von $1z^3 + 2z^2 + 8z^1 + 8z^0$ subtrahirt giebt $(1-1)z^3 + (2-1)z^2 + (8-5)z^1 + 8z^0 = 1z^2 + 3z^1 + 8z^0$; somit ist der gegebene Dividend $= (2z^1 + 3z^0) . 4z^2 + (2z^1 + 3z^0) . 5z^1 + (1z^2 + 3z^1 + 8z^0) = (2z^1 + 3z^0) . (4z^2 + 5z^1) + (1z^2 + 3z^1 + 8z^0)$. Endlich ist $\frac{1z^2 + 3z^1 + 8z^0}{2z^1 + 3z^0} = \frac{13z^1 + 8z^0}{2z^1 + 3z^0}$; da aber $\frac{13z^1}{2z^1}$ keine ganze Zahl zum Koefficienten giebt, so muß man sich den Dividenden $1z^2 + 3z^1 + 8z^0$ nochmals umgeformt denken in $(12 + 1)z^1 + 8z^0 = 12z^1 + 1z^1 + 8z^0 = 12z^1 + (1z^1 + 8z^0)z^0 = 12z^1 + 18z^0$; dann ist $\frac{12z^1}{2z^1} = 6z^0$, und indem man hiemit den ganzen Divisor multiplicirt, ergiebt sich $12z^1 + 18z^0$, was dem letzten Dividenden gleich ist. Also ist der gegebene Dividend $= (2z^1 + 3z^0) . (4z^2 + 5z^1) + (2z^1 + 3z^0) . (6z^0) = (2z^1 + 3z^0) . (4z^2 + 5z^1 + 6z^0)$, und der gesuchte Quotient $= 4z^2 + 5z^1 + 6z^0 = 456$.

3. Ist der Divisor die Grundzahl des Ziffernsystems oder eine Potenz derselben, so ergiebt sich der Ausdruck für den Quotienten unmittelbar indem man im Ausdrucke des Dividenden, von der Rechten zur Linken zählend, so viele Stellen durch ein Komma absondert als der Ausdruck des Divisors Nullen enthält (vgl. § 84). Denn soll z. B. 2357 mit 100 dividirt werden, so ist dies $= \frac{2z^3 + 3z^2 + 5z^1 + 7z^0}{1z^2 + 0z^1 + 0z^0} = \frac{2z^3 + 3z^2 + 5z^1 + 7z^0}{z^2} = 2z^{3-2} + 3z^{2-2} + 5z^{1-2} + 7z^{0-2} = 2z^1 + 3z^0 + 5z^{-1} + 7z^{-2}$, also, nach § 84, $= 23, 57$. Ebenso ist $\frac{2350}{100} = 23, 50 = 23, 5$, da nämlich $2z^1 + 3z^0 + 5z^{-1} + 0z^{-2} = 2z^1 + 3z^0 + 5z^{-1}$; ferner $\frac{2300}{100} = 23{,}00 = 23$ und $\frac{2000}{100} = 20{,}00 = 20$. Ist auch der Dividend eine Potenz von

z, so ist der Ausdruck des Quotienten eine 1 mit so viel Nullen als der Dividendenausdruck deren mehr enthält als der Divisorausdruck; so z. B. $\frac{1000}{100}$ ist $= 10{,}00 = 10$, wie nach § 81, 3 auch schon daraus folgt, daß $\frac{z^3}{z^2} = z^{3-2}$.

§ 91.

1. Daß häufig eine Zahl kein wirkliches Vielfaches einer andren, womit sie dividirt werden soll, ist, kam bereits in § 42, 3 zur Sprache. Wenn man aber eine Anzahl Glieder der Zahlenreihe von 2 an jedes mit 2, 3 u. s. f. multiplicirt und die sich ergebenden Vielfachen nach den Stellen, die ihnen in der Zahlenreihe zukommen, ordnet, so überzeugt man sich bald, daß zwischen ihnen Lücken übrig bleiben, die durch Zahlen ausgefüllt werden, welche keine Vielfachen andrer Zahlen, mithin auch durch keine andre Zahl ohne Rest (§ 43, 3) dividirbar oder, wie man statt „ohne Rest dividirbar" zu sagen pflegt, theilbar sind (vgl. § 74, 1). Zahlen dieser Art nennt man Primzahlen, und insoferne sich alle übrigen Zahlen, die Produktzahlen, durch Multiplikation aus ihnen ableiten lassen, heißen sie auch die Primfaktoren oder die letzten oder einfachen Theiler (Divisoren) der andren Zahlen.

2. Versteht man unter a, b, c u. s. w. bloß Primzahlen, so ergiebt sich sofort, daß man jede Produktzahl durch einen Ausdruck wie a . b . c . d . . . oder, da ein und derselbe Primfaktor mehrmals in ihr enthalten sein kann, durch einen Ausdruck wie $a . a . b . c . c . c \ldots = a^2 . b . c^3$ wird darstellen können, was man das Zerlegen der Zahl in ihre Primfaktoren nennt.

3. Jede Produktzahl ist nicht nur durch ihre einzelnen Primfaktoren theilbar, sondern auch durch alle kleineren Produktzahlen, welche sich ergeben indem man von jenen Primfaktoren bloß zwei oder drei u. s. f. mit einander multiplicirt; also z. B. a . b . c . d nicht nur durch a, b, c, d, sondern auch durch a . b, a . c, a . d, b . c, c . d, a . b . c, b . c . d u. s. f. Diese Produkte der Primfaktoren sind die zusammengesetzten Theiler der Zahl.

4. Wenn aber eine Zahl A nicht ein Primfaktor einer andren B, oder ein bloß aus den Primfaktoren der letzteren gebildetes Produkt ist, sondern entweder zwar nur Primfaktoren von B, aber in größerer Anzahl als sie in B vorkommen, oder außer Primfaktoren von B auch noch andre, oder endlich gar keinen Primfaktor von B enthält, so ist B durch A nicht theilbar, oder A ist kein Theiler von B, oder, wie man auch sagt, A geht in B nicht auf. Ist z. B. B = a . b . c . d und ist e und f von a, b, c, d sowie diese vier Primfaktoren von einander verschieden, so ist weder e oder f, noch a . a oder a . b . b u. s. f., noch c . e oder b . d . f, noch endlich e . f ein Theiler von B.

§ 92.

1. Wenn $a < b$, so kann man (vgl. § 90, 1) für $\frac{a}{b}$ doch setzen $\frac{b \,.\, 0 + a}{b}$, d. h. insoferne man auch das Nullfache als ein Vielfaches betrachten kann, läßt sich auch jeder echte Bruch unter der nämlichen allgemeinen Form wie jeder unechte (§ 43, 3) darstellen, und man kann auch dann, wenn der Dividend kleiner als der Divisor ist, von einem Reste der Division sprechen, nur daß dieser dann dem Dividenden gleich ist.

2. Auch wenn eine Zahl durch eine andre theilbar, also ohne eigentlichen Rest dividirbar ist, kann man doch in gewissem Sinne von einem Reste der Division sprechen, insoferne man Null darunter versteht; da sich jedes Vielfache von a z. B. $a \,.\, b$ auch als $a \,.\, b + 0$ betrachten läßt.

3. Da der Rest nothwendig kleiner als der Divisor ist, so können sich, wenn man mit einer Zahl a noch so viele beliebige Zahlen dividirt, im Ganzen doch nicht mehr als $a - 1$ verschiedne Reste ergeben, nämlich die Zahlen von 1 bis $a - 1$. Und rechnet man noch den uneigentlichen Rest Null (N. 2) hinzu, so ist die Anzahl aller möglichen Reste a, also gleich dem Divisor.

§ 93.

1. Wenn eine Zahl durch mehrere andre Zahlen theilbar ist, so nennt man sie ein gemeinschaftliches Vielfaches, ein Gemeinvielfaches derselben, und zwar ist sie das kleinste Gemeinvielfache, wenn sie die kleinste Zahl ist, in welcher alle gegebenen Divisoren aufgehn. Jede Produktzahl ist sonach (vgl. § 91, 3) ein Gemeinvielfaches ihrer Primfaktoren und aller kleineren Produktzahlen, die sich aus diesen Primfaktoren bilden lassen; und umgekehrt: wenn eine Zahl ein Gemeinvielfaches mehrerer andren sein soll, so muß sie eine Produktzahl sein, unter deren Primfaktoren alle diese andren Zahlen selbst, insoferne sie Primzahlen sind, oder die Primfaktoren aller dieser Zahlen, insoferne sie Produktzahlen sind, vorkommen, und zwar muß im Gemeinvielfachen jeder Primfaktor wenigstens so oft enthalten sein als ihn derjenige Divisor enthält, in welchem er am öftesten (auf der höchsten Potenz) vorkommt (vgl. § 91, 4). Soll aber eine Zahl das kleinste Gemeinvielfache gegebener andren sein, so darf sie keinen Primfaktor öfter enthalten als derjenige Divisor, in welchem er am öftesten vorkommt, und darf außer den Primfaktoren der gegebenen Divisoren keinen andren Primfaktor enthalten. So z. B. ist $b \,.\, c \,.\, d$ kein Gemeinvielfaches von a, $a \,.\, b$ und $b \,.\, b \,.\, c$, weil in $b \,.\, c \,.\, d$ der Primfaktor a gar nicht und der Primfaktor b nur einmal vorkommt, während ihn $b \,.\, b \,.\, c$ zweimal enthält; dagegen ist $a \,.\, b \,.\, b \,.\, c \,.\, c \,.\, c \,.\, d$ allerdings ein Gemeinvielfaches von a, $a \,.\, b$ und $b \,.\, b \,.\, c$, aber nicht das kleinste, weil darin der Primfaktor c dreimal enthalten ist, während er unter den Divisoren nur einmal vorkommt, und weil überdies

a . b . b . c . c . c . d auch den Primfaktor d enthält, der unter den Divisoren gar nicht vorkommt; sondern das kleinste Gemeinvielfache von a, a . b und b . b . c ist a . b . b . c.

2. Wenn zwei oder mehr Zahlen durch eine und dieselbe Zahl theilbar sind, so heißt diese ein gemeinschaftlicher Faktor oder ein Gemeintheiler von jenen, und zwar ist sie der größte Gemeintheiler, wenn sie die größte Zahl ist, welche in allen jenen Zahlen aufgeht. Soll eine Zahl ein Gemeintheiler gegebener andren sein, so darf sie hienach (vgl. § 91, 4) kein Primfaktor sein noch einen solchen enthalten, der nicht ein Primfaktor aller gegebenen Zahlen wäre; auch darf sie keinen in allen gegebenen Zahlen vorkommenden Primfaktor öfter enthalten als diejenige Zahl, in welcher er am wenigsten oft (auf der niedrigsten Potenz) vorkommt. Soll ferner eine Zahl der größte Gemeintheiler sein, so muß sie alle Primfaktoren enthalten, die in allen gegebenen Zahlen vorkommen, und zwar jeden so oft als ihn diejenige Zahl enthält, in welcher er am wenigsten oft vorkommt. So z. B. sind d, c . d, a . a . b keine Gemeintheiler von a . a . a . b . c, a . b . c . c . d und a . b . c . d . d, wohl aber a, b, c, a . b, a . c, b . c, der größte ist jedoch a . b . c. Ist eine von den gegebenen Zahlen ein Theiler aller übrigen, so ist sie selbst der größte Gemeintheiler aller; so ist z. B. a . b . c der größte Gemeintheiler von a . b . c, a . a . b . c, a . b . c . c, a . b . c . d; da auch das Einfache gewissermaßen als ein Vielfaches zu betrachten, sonach jede Zahl durch sich selbst theilbar ist.

3. Zahlen, die einen Gemeintheiler haben, heißen theilerverwandte Zahlen, solche dagegen, die keinen Gemeintheiler haben, theilerfremde Zahlen oder auch Primzahlen zu einander oder relative Primzahlen, im Gegensatze der absoluten Primzahlen, die überhaupt untheilbar sind (§ 91, 1).

4. Dividirt man zwei theilerverwandte Zahlen durch ihren größten Gemeintheiler, so sind die Quotienten theilerfremd (sie haben keinen gemeinschaftlichen Primfaktor und überhaupt keinen gemeinschaftlichen Faktor mehr, da der größte Gemeintheiler als solcher schon alle in beiden Zahlen zugleich enthaltenen Primfaktoren enthalten muß, s. N. 2). Bei mehr als zwei theilerverwandten Zahlen kann jedoch nach der Division mit dem größten Gemeintheiler immer noch ein Quotient mit einem oder mehreren andren theilerverwandt sein, nur nicht mit allen andern. So z. B. sind, wenn man a . a . b . c . d und a . b . c . c . e durch ihren größten Gemeintheiler a . b . c dividirt, die Quotienten (a . d und c . e) sofort theilerfremd; dividirt man aber a . a . a . b . c, a . b . c . c . d und a . b . c . d . d durch ihren größten Gemeintheiler a . b . c, so sind von den drei Quotienten a . a, c . d und d . d die beiden letzten immer noch theilerverwandt.

5. Dividirt man die eine von zwei theilerverwandten Zahlen durch ihren größten Gemeintheiler, so ist das Produkt des Quotienten und der andren Zahl das kleinste Gemeinvielfache der beiden Zahlen; denn es enthält alle Primfaktoren, die beiden Zahlen gemein, und außer-

dem alle, die jeder Zahl eigen sind, und zwar jeden gemeinsamen so oft als ihn diejenige Zahl enthält, worin er am öftesten vorkommt, sonst aber keinen Primfaktor. So z. B. ist von $a.b.b.c$ und $a.b.c.d$ der größte Gemeintheiler $a.b.c$ und das kleinste Gemeinvielfache $= a.b.b.c.\frac{a.b.c.d}{a.b.c} = a.b.b.c.d$ oder $= \frac{a.b.b.c}{a.b.c}.a.b.c.d = b.a.b.c.d = a.b.b.c.d.$

§ 94.

1. Jeder Gemeintheiler zweier Zahlen theilt auch ihre Summe und ihre Differenz. Denn bezeichnet man den Gemeintheiler mit d und ist die eine Zahl $a = d.m$, die andre $b = d.n$, so ist $a + b = d.(m + n)$ und $a - b = d.(m - n)$; sind nun m und n eigentliche Zahlen, wie hier vorausgesetzt wird, so können auch $m + n$ und $m - n$ nur solche sein; also ist auch $a + b$ und $a - b$ durch d theilbar.

2. Ebenso ist jede gleichartige oder gemischte mehrgliedrige Summe durch jeden Gemeintheiler der Summenglieder theilbar.

3. Zwei unmittelbar auf einander folgende Glieder der Zahlenreihe sind nothwendig theilerfremd (§ 93, 3); denn hätten sie einen Gemeintheiler, so müßte dieser nach N. 1 auch ihre Differenz, welche $= 1$, theilen, was unmöglich ist, da 1 kein Vielfaches von irgend einer Zahl.

4. Jeder Theiler einer Zahl theilt natürlich auch jedes Vielfache derselben; folglich ist jeder Gemeintheiler zweier oder mehrerer Zahlen auch ein Gemeintheiler beliebiger Vielfachen derselben.

5. Jeder Gemeintheiler zweier Zahlen theilt auch den Rest, welchen „die größere nach der kleineren läßt", d. h. welcher sich ergiebt, wenn man die größere durch die kleinere dividirt; denn dieser Rest ist die Differenz zwischen der größeren und einem Vielfachen der kleineren (vgl. N. 1 und 4). Dividirt man mit diesem Reste die kleinere Zahl, den vorigen Divisor, so theilt aus gleichem Grunde jeder Gemeintheiler der gegebenen Zahlen auch den sich hiebei ergebenden zweiten Rest; dividirt man mit letzterem den ersten Rest, den zweiten Divisor, so theilt jeder Gemeintheiler der gegebenen Zahlen auch den dritten Rest u. s. f. Geht endlich die Division auf, so wird auch der letzte Divisor (der vorletzte Rest, insoferne nun 0 der letzte Rest ist, vgl. § 92, 2) durch jeden Gemeintheiler der gegebenen Zahlen getheilt. Und zwar ist er selbst der größte Gemeintheiler derselben; denn gäbe es einen noch größeren, so müßte er auch durch diesen, also durch eine größere Zahl als er selbst ist, theilbar sein.

6. Kennt man einen oder den andren Faktor des Dividenden und weiß man, daß dieser Faktor nicht auch ein Faktor des Divisors ist, oder kennt man einen Faktor des Divisors und weiß, daß derselbe nicht auch im Dividenden enthalten ist, so kann man diesen Faktor weglassen und dadurch das eben angegebene Verfahren der aufeinanderfolgenden Divisionen zur Auffindung des größten Gemeintheilers

zweier Zahlen etwas abkürzen; durch dieses Weglassen eines nichtgemeinschaftlichen Faktors kann nämlich die sich als größter Gemeintheiler ergebende Zahl nicht verändert werden, da derselbe nur das Produkt der gemeinsamen Faktoren ist. — Ergiebt sich als letzter Divisor (vorletzter Rest) die Eins, so ist dies, da Eins keine Zahl zum Theiler hat (vgl. Nr. 3), ein Beweis, daß die gegebenen Zahlen keinen Gemeintheiler haben.

7. Hat man auf diese Weise den größten Gemeintheiler zweier Zahlen A und B gefunden und sucht man für diesen und für eine dritte Zahl C wieder auf dieselbe Art den größten Gemeintheiler, so ist letzterer der größte Gemeintheiler von A, B, C; und so kann man durch Wiederholung desselben Verfahrens auch für 4, 5 und mehr Zahlen den größten Gemeintheiler finden.

8. Ist nach Vorstehendem der größte Gemeintheiler zweier Zahlen A und B ermittelt, so ergiebt sich nach § 93, 5 auch ihr kleinstes Gemeinvielfaches. Sucht man für dieses und für eine dritte Zahl C wieder vorerst den größten Gemeintheiler und dann das kleinste Gemeinvielfache, so ist dieses das kleinste Gemeinvielfache von A, B und C, u. s. f.

§ 95.

1. Das Produkt zweier oder mehrerer Zahlen ist durch eine Zahl A theilbar, wenn alle Primfaktoren von A unter den Primfaktoren jenes Produktes vorkommen (vgl. § 91, 4). Hiezu ist es jedoch nicht nöthig, daß irgend eine der gegebenen Zahlen selbst durch A theilbar sei; wohl aber müssen, wenn dies nicht der Fall ist, die zwei gegebenen Zahlen, oder, bei mehr als zwei gegebenen Zahlen, wenigstens zwei mit A theilerverwandt sein. Ist A eine Primzahl, so muß, wenn das Produkt durch A theilbar sein soll, jedenfalls einer der Faktoren durch A theilbar sein.

2. Ist hingegen eine Zahl A zu jeder von zwei oder mehreren gegebenen Zahlen theilerfremd; finden sich also die Primfaktoren von A nicht unter den Primfaktoren der gegebenen Zahlen, so können sie sich natürlich auch nicht unter den Primfaktoren des Produktes dieser Zahlen finden; dies kann also nicht durch A theilbar sein. Demnach ist auch keine Potenz einer Zahl, zu welcher A theilerfremd ist, durch A theilbar.

3. Ist ein Produkt durch eine Zahl A theilbar, während alle seine Faktoren bis auf einen zu A theilerfremd sind, so muß dieser eine durch A theilbar sein.

§ 96.

1. Wenn jeder Faktor eines Produktes durch eine Zahl A theilbar ist, so ist das Produkt durch diejenige Potenz von A theilbar, deren Exponent der Anzahl der Faktoren gleich ist. Z. B. das Produkt von A . m, A . n, A . p ist $= A^3 . (m . n . p)$, also, da m . n . p so gut wie m, n, p eine eigentliche Zahl sein muß, durch A^3 theilbar.

2. Wenn daher eine Zahl durch eine andre A theilbar ist, so ist jede Potenz der ersteren durch die gleichgradige Potenz von A theilbar. Z. B. $(A . m)^3$ ist $= A^3 . m^3$, also, da m^3 so gut wie m eine eigentliche Zahl sein muß, durch A^3 theilbar.

3. Wenn von zwei theilerverwandten Zahlen B und A die letztere zwar keinen Primfaktor enthält, der nicht auch in der ersteren vorkäme, aber einen oder den andren Primfaktor öfter enthält als er in B vorkommt, so ist (§ 91, 4) B nicht durch A theilbar, mithin ist auch keine Potenz von B durch die gleichgradige von A theilbar (N. 2); wohl aber kann eine höhere Potenz von B durch eine niedrigere von A theilbar sein (vgl. § 95, 1). Ist z. B. $B = a . b . c$, $A = a . a . b$, so ist schon $B^2 = a^2 . b^2 . c^2$ durch A, $B^4 = a^4 . b^4 . c^4$ durch $A^2 = a^2 . a^2 . b^2 = a^4 . b^2$ theilbar. Enthält dagegen A einen Primfaktor, der nicht in B enthalten ist, so kommt dieser auch in keiner höheren Potenz von B vor; mithin ist (§ 91, 4) auch keine höhere Potenz von B durch eine niedrigere von A theilbar.

4. Wenn zwei Zahlen theilerfremd sind, so kann auch keine Potenz der einen mit einer Potenz der andren theilerverwandt, viel weniger durch sie theilbar sein.

5. Demnach ist jede Potenz eines echten oder unechten Bruches nothwendig wieder ein Bruch.

6. Folglich lassen sich die irrationalen Wurzeln, ungeachtet der in § 75 erörterten Aehnlichkeit, keineswegs auf Brüche zurückführen, d. h. es giebt keinen Bruch, der einer irrationalen Wurzel völlig gleich wäre, da jede irrationale Wurzel, mit ihrem Wurzelexponenten potenzirt, eine ganze Zahl giebt. (Wohl aber lassen sich immer zwei Brüche angeben, zwischen denen der Werth einer solchen Wurzel liegt und die so wenig als man nur will von einander, folglich auch von der zwischen ihnen liegenden Wurzel verschieden, also der letzten annähernd gleich, Näherungswerthe derselben sind. Solche Brüche kann man z. B. nach § 47, 2 finden, indem sich hienach zwischen zwei Brüche immer ein dritter einschalten läßt.)

§ 97.

1. Jede mehrziffrige Zahl, deren letzte Ziffern zur Rechten keine Nullen sind, läßt sich so in zwei Summanden zerlegen, daß man z. B. $12345 = 12340 + 5$ oder $= 12300 + 45$ oder $= 12000 + 345$ oder $= 10000 + 2345$ setzt; ferner ist (vgl. § 89, 3) $12340 = 1234 \times 10$, $12300 = 123 . 100 = 123 . 10^2$, $12000 = 12 . 1000 = 12 \times 10^3$, $10000 = 10^4$. Nun sind 2 und 5 die Primfaktoren von 10, mithin muß (§ 96, 2) 10^2 durch 2^2 und 5^2, 10^3 durch 2^3 und 5^3, 10^4 durch 2^4 und 5^4 theilbar sein; ferner ist hienach (vgl. § 94, 4) $1234 . 10$ durch 2 und 5, $123 . 100$ durch 2^2 und 5^2, $12 . 1000$ durch 2^3 und 5^3 theilbar. Folglich wird (§ 94, 1) $12340 + 5$ durch 2 und 5 theilbar sein, wenn 5 hiedurch theilbar ist; ebenso $12300 + 45$ durch 2^2 und 5^2, wenn 45 hiedurch theilbar ist; ferner $12000 + 345$ durch 2^3 und 5^3, wenn 345 hiedurch theilbar ist; endlich $10000 + 2345$

durch 2^4 und 5^4, wenn 2345 hiedurch theilbar ist. Allgemein: jede mehrziffrige Zahl ist durch 2^m und 5^m theilbar, wenn die durch ihre m letzten Ziffern zur Rechten ausgedrückte Zahl durch 2^m und 5^m theilbar ist.

2. Endigt der numerische Ausdruck einer Zahl mit m Nullen, d. h. ist die Zahl als ein Vielfaches von 10^m zu betrachten (§ 89, 3), so ist sie natürlich auch durch 2^m und 5^m theilbar (§ 94, 4 und 96, 2).

§ 98.

1. Nach § 62, 5 ist $10^2 - 1 = (10 - 1) . (10 + 1) = 9 . 11 = 99$; $10^3 - 1 = (10 - 1) . (10^2 + 10 + 1) = 9 . 111 = 999$; überhaupt $10^m - 1$ = einem Produkt aus $10 - 1 = 9$ und einer Zahl, deren numerischer Ausdruck nur die Ziffer 1, diese aber m mal enthält, wonach der Ziffernausdruck dieses Produktes nur aus der m mal gesetzten Ziffer 9 besteht. Man kann in dieser Beziehung die um 1 verminderten Potenzen von 10 Neunerzahlen nennen.

2. Jede um 1 verminderte Potenz von 10 ist nach N. 1 theilbar durch 9, folglich, da $9 = 3 . 3$, auch durch 3.

3. Es ist z. B. $3456 = 3 . 10^3 + 4 . 10^2 + 5 . 10 + 6$; ferner ist allgemein $10^m = (10^m - 1) + 1$, also $3456 = 3 . ((10^3 - 1) + 1) + 4 . ((10^2 - 1) + 1) + 5 . ((10 - 1) + 1) + 6 = 3 . (10^3 - 1) + 4 . (10^2 - 1) + 5 . (10 - 1) + 3 . 1 + 4 . 1 + 5 . 1 + 6 = (3 . (10^3 - 1) + 4 . (10^2 - 1) + 5 . (10 - 1)) + (3 + 4 + 5 + 6)$. Nach N. 1, dann § 94, 4 und 2 ist der erste Summand dieser letzten Summe, d. h. $(3 . (10^3 - 1) + 4 . (10^2 - 1) + 5 . (10 - 1))$, nothwendig durch 9 theilbar; die Summe selbst, also die Zahl 3456, wird somit ebenfalls durch 9 theilbar sein, wenn der zweite Summand, nämlich $(3 + 4 + 5 + 6)$, es ist (§ 94, 1); oder wenn dieser zweite Summand nicht durch $9 = 3 . 3$, sondern nur durch 3 theilbar wäre, so würde die Summe, die Zahl 3456, wenigstens durch 3 theilbar sein. Allgemein: eine Zahl ist durch 9 oder wenigstens durch 3 theilbar, wenn die Summe der durch ihre einzelnen Ziffern ausgedrückten Zahlen, oder kürzer: wenn ihre Ziffernsumme durch 9 oder wenigstens durch 3 theilbar ist.

§ 99.

1. Nach § 62, 6 ist allgemein $10^{2n} - 1 = (10 + 1) \times (10^{2n-1} - 10^{2n-2} + \ldots + 10 - 1)$ und $10^{2n+1} + 1 = (10 + 1) (10^{2n} - 10^{2n-1} + \ldots - 10 + 1)$, somit jede gerade Potenz von 10, wenn man sie um 1 vermindert, und jede ungerade, wenn man sie um 1 vermehrt, durch $10 + 1 = 11$ theilbar. Ferner ist allgemein $10^{2n} = (10^{2n} - 1) + 1$ und $10^{2n+1} = (10^{2n+1} + 1) - 1$.

2. Nun ist z. B. $54769 = 5 . 10^4 + 4 . 10^3 + 7 . 10^2 + 6 . 10^1 + 9 = 5 . ((10^4 - 1) + 1) + 4 . ((10^3 + 1) - 1) + 7 . ((10^2 - 1) + 1) + 6 . ((10^1 + 1) - 1) + 9 = 5 . (10^4 - 1 + 4 . (10^3 + 1) + 7 . (10^2 - 1) + 6 . (10^1 + 1) + 5 . 1 + 4 . (- 1) + 7 . 1 + 6 . (- 1) + 9 = (5 . (10^4 - 1)$

$+ 4 . (10^3 + 1) + 7 . (10^2 - 1) + 6 . (10^1 + 1)) + ((5 + 7 + 9) - (4 + 6))$. Der erste Summand dieser Summe, nämlich $(5 . (10^4 - 1) + \ldots . + 6. (10^1 + 1))$, ist nach N. 1, dann § 94, 4 und 2 jedenfalls durch 11 theilbar; die Summe, nämlich die Zahl 54769, wird also (§ 94, 1) ebenfalls durch 11 theilbar sein, wenn der zweite Summand, d. h. die Differenz $(5+7+9) - (4+6)$, es ist. Allgemein: eine Zahl ist durch 11 theilbar, wenn die Differenz zwischen der Summe ihrer Ziffern (vgl. § 98, 3) von gerader Ordnung (§ 82, 3) und der Summe ihrer Ziffern von ungerader Ordnung durch 11 theilbar ist.

3. Die Regel gilt, wie sich leicht ergiebt, auch dann, wenn die Differenz dieser Ziffernsummen $= 0$ ist, oder, falls man die Summe der Ziffern von gerader Ordnung wie im Vorigen als Minuenden betrachtet, negativ wird.

§ 100.

1. Nach § 97—99 läßt sich aus dem Ziffernausdruck einer Zahl leicht entnehmen, ob sie durch 2, durch eine Potenz von 2, durch 3, durch 5, durch eine Potenz von 5, durch 9, durch 11 theilbar ist. Zeigt sie sich hienach durch mehr als eine von diesen Zahlen theilbar, z. B. durch 2, 3 und 11, so erkennt man, daß sie auch durch die aus diesen Zahlen zu bildenden Produkte, also z. B. durch $2 . 3 = 6$, $2 . 11 = 22$, $3 . 11 = 33$, $2 . 3 . 11 = 66$ theilbar ist (§ 91, 3).

2. Außer den vorstehenden Regeln zur Erkennung der Theilbarkeit gewisser Zahlen durch gewisse andre lassen sich keine mehr geben, die ebenso einfach zu begründen und für den Gebrauch ebenso geeignet wären. Daher bleibt namentlich behufs der Zerlegung einer gegebenen Zahl in ihre Primfaktoren (§ 91, 2), nachdem man vorstehende Regeln alle angewendet und die sich hienach ergebenden Primfaktoren 2, 3, 5, 11 ausgeschieden hat, nichts mehr übrig als daß man fortfährt, mit den erfahrungsmäßig erkannten Primzahlen, wie sie in der Zahlenreihe aufeinanderfolgen, versuchsweise zu dividiren, und so zu ermitteln, ob die gegebene Zahl vielleicht noch durch 7, 13, 17 u. s. f. theilbar ist. So z. B. ergiebt sich nach obigen Regeln, daß $2522520 = 2^3 . 3^2 . 5 . 11 . 637$; dividirt man nun 637 versuchsweise mit 7, so erhält man 91; dividirt man dies noch einmal mit 7, so ergiebt sich 13, was eine Primzahl ist; also ist $2522520 = 2^3 . 3^2 . 7^2 . 5 . 11 . 13$.

3. Wenn man eine gegebene Zahl a der Reihe nach mit den Primzahlen dividirt, so werden, weil die Divisoren immer größer werden, die Quotienten immer kleiner (§ 50, 4). Sobald nun der Quotient kleiner als der Divisor wird, so ist, wenn bis zu diesem Quotienten kein Quotient eine ganze Zahl war, a eine Primzahl. Denn es sei b die erste Primzahl, welche einen Quotienten $\frac{a}{b} < b$ giebt, so ist $\frac{a}{b} . b < b . b$ (§ 31, 3), also $a < b . b$. Gesetzt nun, es wäre a durch eine Primzahl c, die $> b$, theilbar und $= c . d$, so müßte $c . d < b . b$ sein. Nun könnte nicht $d = b$ sein, weil dann $c . d > b . b$ sein müßte (§ 31, 3); auch könnte nicht $d > b$ sein, weil dann $c . d > c . b$ und

um so mehr c. d $>$ b. b wäre; sollte also c. d $<$ b. b sein, so müßte man annehmen, daß d $<$ b. Alsdann gäbe es aber, da a $=$ c. d sein soll, eine Zahl d $<$ b, wodurch a theilbar wäre, was gegen die Voraussetzung ist, nach welcher a durch keine Primzahl, die $\leqq$ b, mithin auch durch keine Produktzahl, die $<$ b, getheilt werden soll. Folglich giebt es auch keine Primzahl c $>$ b, wodurch a theilbar wäre, d. h. a ist selbst eine Primzahl.

§ 101.

1. Um gegebene Quotienten mit verschiedenen Divisoren in Quotienten mit gleichem Divisor zu verwandeln, braucht man nicht immer, wie in § 41, 3 geschehen, den Dividenden und den Divisor eines jeden mit den Divisoren aller übrigen zu multipliciren; sondern wenn die Divisoren theilerverwandt sind, so kann schon ihr kleinstes Gemeinvielfaches als neuer Divisor dienen, wobei man jeden Dividenden mit dem Quotienten zu multipliciren hat, den die Division des Gemeinvielfachen mit dem zum fraglichen Dividenden gehörigen Divisor giebt. So z. B. ist $\frac{a}{bc} + \frac{d}{ce^2} = \frac{ae^2 + db}{bce^2}$ u. s. f.

2. Auch bei der Umformung von Wurzeln mit verschiedenen Exponenten gilt natürlich (vgl. § 72, 1) Aehnliches, d. h. auch hier braucht man den Potenz- und den Wurzelexponenten eines jeden Ausdruckes nur dann mit den Wurzelexponenten aller übrigen Ausdrücke zu multipliciren (wie dies in § 72, 4 geschehen), wenn die Wurzelexponenten sämmtlich theilerfremd sind; außerdem genügt schon ihr kleinstes Gemeinvielfaches als neuer Wurzelexponent, und der Quotient, den dieses Gemeinvielfache bei der Division mit jedem der Wurzelexponenten giebt, ist die Zahl, womit man den zu letzterem gehörigen Potenzexponenten zu multipliciren hat. So z. B. ist $\sqrt[cd]{a^b} . \sqrt[de]{f^g} = \sqrt[cde]{a^{be}} . \sqrt[cde]{f^{cg}} = \sqrt[cde]{a^{be} . f^{cg}}$.

3. Hat man nach § 41, 4 einen Bruch dadurch in einfacherer Form dargestellt, daß man Zähler und Nenner mit ihrem größten Gemeintheiler dividirt hat, so sind beide nun relative Primzahlen (§ 93, 4) und es ist kein weiteres Reduciren („Aufheben") mehr möglich. Der Bruch ist dann in den möglichst kleinen Zahlen ausgedrückt oder auf seine kleinste Benennung gebracht oder in einen Primbruch umgeformt.

4. Ebenso ist eine Wurzel auf den möglichst niedrigen Grad zurückgeführt (§ 72, 5), sobald man den Wurzelexponenten und den Potenzexponenten des Radikanden mit ihrem größten Gemeintheiler dividirt hat.

§ 102.

1. Wenn man zwei Quotienten dadurch in Quotienten mit gleichem Divisor umformt, daß man ihnen, wie in § 41, 3, das Produkt ihrer Divisoren zum Divisor giebt, und es ist dann die Differenz ihrer Dividenden $=$ 1, so sind die Dividenden der Quotienten, so wie diese

gegeben sind, relative Primzahlen, ebenso ihre Divisoren und so auch Dividend und Divisor eines jeden (die Quotienten sind Primbrüche, § 101, 3).

Denn es sei der eine Quotient $\frac{a}{b}$, der andre $\frac{c}{d}$, oder jener $\frac{a \,.\, d}{b \,.\, d}$, dieser $\frac{b \,.\, c}{b \,.\, d}$; ist nun $a \,.\, d - b \,.\, c = 1$ oder sind $a \,.\, d$ und $b \,.\, c$ theilerfremd (§ 94, 3), so können weder a und c, noch b und d, noch a und b, noch c und d einen Gemeintheiler haben, da dieser (§ 94, 4) auch ein Gemeintheiler von a. d und b. c sein müßte.

2. Brüche dieser Art haben die Eigenschaft, daß es keinen Bruch giebt, der dem Werthe nach zwischen ihnen läge und dabei eine kleinere Zahl zum Nenner hätte als der größere der beiden gegebenen Nenner ist.

Denn gäbe es einen solchen Bruch, so würde (§ 19, 3 und 4) die Differenz zwischen ihm und jedem der gegebenen Brüche kleiner sein müssen, als die Differenz dieser beiden selbst, d. h. $< \frac{1}{b \,.\, d}$; nimmt man nun aber an, der fragliche Bruch sei mit jedem der gegebenen nach § 41, 3 auf einerlei Nenner gebracht und die Zähler der sich hienach ergebenden Differenzbrüche seien auch nicht > 1, so müßte doch (§ 31, 3) der Nenner des einen von diesen Differenzbrüchen $<$ b. d sein, mithin der Differenzbruch $> \frac{1}{b \,.\, d}$ (§ 45, 4).

§ 103.

1. Decimalbrüche haben, wie aus § 84 unmittelbar hervorgeht, einerlei Nenner, wenn sie gleichviele Decimalziffern (Decimalstellen) haben.

2. Um Decimalbrüche auf gleiche Benennung zu bringen, hängt man demjenien, welcher weniger Decimalstellen hat, zur Rechten noch so viele Nullen an, daß mit diesen die Anzahl seiner Decimalstellen der Anzahl der Decimalstellen des andren gleich wird. Hiedurch wird nämlich der Werth des Bruches nicht geändert; denn es ist z. B. $0{,}123 = \frac{123}{10^3} = \frac{123}{1000}$ und $0{,}1230 = \frac{1230}{10000} = \frac{123 \,.\, 10}{1000 \,.\, 10}$ (vgl. § 89, 3), also (§ 41, 4) $= \frac{123}{1000} = 0{,}123$; ebenso $0{,}12300 = \frac{12300}{100000} = \frac{123 \,.\, 100}{1000 \,.\, 100} = \frac{123}{1000} = 0{,}123$ u. s. f.; vgl. auch § 90, 3.

3. Einer ganzen Zahl kann man die Form eines Decimalbruches von beliebigem Nenner geben, indem man ihr rechts ein Komma und weiter so viele Nullen, als dieser Nenner hat, anfügt. Denn der Analogie nach (vgl. § 84, 1) muß z. B. 2,0 so viel als $\frac{20}{10}$, ebenso 2,00 so

viel als $\frac{200}{100}$, ferner 2,000 so viel als $\frac{2000}{1000}$ bedeuten; es ist aber (vgl. § 89, 3) $\frac{20}{10} = \frac{2.\ 10}{10} = 2$, ebenso $\frac{200}{100} = \frac{2.\ 100}{100} = 2$, ferner $\frac{2000}{1000} = \frac{2.\ 1000}{1000} = 2$ u. s. f.; vgl. auch § 90, 3.

§ 104.

1. Gegebene Decimalbrüche werden addirt oder subtrahirt, indem man sie, wenn sie nicht schon einerlei Nenner haben, auf gleiche Benennung bringt, dann wie ganze Zahlen addirt oder subtrahirt und im Ergebnisse so viele Decimalstellen absondert als die gegebenen Brüche haben. Man sieht wohl, daß dies, wie das bekannte Addiren und Subtrahiren der Brüche überhaupt, auf § 33, 2; 34, 2; 36, 2 beruht.

2. Sind ganze Zahlen mit Decimalbrüchen durch Addition oder Subtraktion zu verbinden, so kann man jene nach § 103, 3 in Decimalbrüche, die mit den übrigen gleichbenannt sind, umformen und dann nach dem eben (N. 1) Gesagten verfahren.

3. Man braucht übrigens bei der Anwendung dieser Regeln die beizufügenden Nullen nicht wirklich anzuschreiben und hat nur darauf zu achten, daß die Ziffern von einerlei Ordnung gehörig unter einander zu stehn kommen; so z. B. wenn 3, 14 und 0,0027 und 0,056 addirt werden sollen, kann man

$$\text{statt}\ \begin{cases}3{,}1400\\0{,}0027\\0{,}0560\end{cases}\ \text{auch bloß}\ \begin{cases}3{,}14\\0{,}0027\\0{,}056\end{cases}$$

schreiben; ebenso kann man, wenn z. B. von 7,24156 die ganze Zahl 3 subtrahirt werden soll,

$$\text{statt}\ \begin{cases}7{,}24156\\3{,}00000\end{cases}\ \text{auch bloß}\ \begin{cases}7{,}24156\\3\end{cases}$$

oder, wenn von 7 der Bruch 3,24156 subtrahirt werden soll,

$$\text{statt}\ \begin{cases}7{,}00000\\3{,}24156\end{cases}\ \text{auch bloß}\ \begin{cases}7\\3{,}24156\end{cases}$$

setzen.

§ 105.

1. Um einen Decimalbruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, multiplicirt man seinen Zähler mit derselben und sondert im Ergebniß wieder ebensoviele Decimalstellen ab. (Nach § 39, 2).

2. Ist die ganze Zahl eine Potenz von 10, so hat man hienach und nach § 89, 3 an den Zähler so viele Nullen als der Ausdruck dieser Potenz enthält anzuhängen und dann im Ergebniß so viele Stellen als der Decimalbruch hat abzusondern; dadurch wird z. B. 1,23 . 1000 = 1230,00 und 1,234 . 1000 = 1234,000 und 1,2345 . 1000 = 1234,5000. Weil aber (vgl. § 103, 3 und 2) 1230,00 = 1230 und 1234,000 = 1234 und 1234,5000 = 1234,5

ist, so kann man, um das Anschreiben entbehrlicher Nullen zu vermeiden, die Regel so fassen: hat der Zähler weniger Stellen als die Potenz von 10 Nullen, so hängt man an jenen so viele Nullen als die Differenz zwischen der Nullenzahl der Potenz und der Stellenzahl des Zählers angiebt; hat der Zähler ebenso viele Stellen als die Potenz Nullen, so ist der unveränderte Zähler (jedoch, wie sich versteht, mit Weglassung des Decimalstriches sowie der bei einem echten Decimalbruch vor diesem stehenden Null) dem Produkte gleich; hat endlich der Zähler mehr Stellen als die Potenz Nullen, so braucht man nur den Decimalstrich um so viele Stellen als die Nullenzahl angiebt weiter nach rechts zu rücken. (Vgl. auch noch § 89, 3).

4. Ein Decimalbruch wird mit einem andren multiplicirt indem man die Zähler mit einander multiplicirt und im Ergebniß so viele Decimalstellen absondert als beide Brüche zusammen haben. (Nach § 40, 1; 89, 2).

§ 106.

1. Ein Decimalbruch wird mit einer ganzen Zahl dividirt indem man den Zähler mit ihr dividirt und im Ergebniß wieder ebenso viele Stellen absondert. (Nach § 38, 1, insofern $\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b}$.)

2. Bleibt hiebei ein Rest, so kann man (vgl. § 103, 2) dem Zähler beliebig viele Nullen anhängen und die Division fortsetzen; nur hat man dann natürlich auch auf diese Nullen bei der Absonderung der Decimalstellen im Ergebnisse Rücksicht zu nehmen.

3. Ist der Divisor eine Potenz von 10, so hat man nur den Decimalstrich um so viele Stellen als der Divisor Nullen zählt weiter nach links zu rücken, wobei es öfters nöthig sein wird, dem Zähler noch eine Null oder einige Nullen vorzusetzen. Denn es ist (vgl. § 38, 1, insofern $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \,.\, c}$,) z. B. $\frac{123{,}45}{10} = \frac{12345}{100} : 10 = \frac{12345}{100 \,.\, 10} = \frac{12345}{1000} = 12{,}345$; ferner $\frac{123{,}45}{1000} = \frac{12345}{100} : 1000 = \frac{12345}{100000} = 0{,}12345$; endlich $\frac{123{,}45}{100000} = \frac{12345}{100} : 100000 = \frac{12345}{10000000} = 0{,}0012345$; vgl. § 90, 3.

4. Ein Decimalbruch wird durch einen andren dividirt, indem man beide Brüche, wenn sie nicht schon einerlei Nenner haben, auf gleiche Benennung bringt und dann den Zähler des Dividenden durch den Zähler des Divisors dividirt. (Nach § 40, 2, da allgemein $\frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^m} = \frac{a : b}{10^m : 10^m} = \frac{a : b}{1} = a : b$ sein muß.)

5. Ebenso wird eine ganze Zahl durch einen Decimalbruch dividirt indem man jene in einen mit diesem gleichbenannten Decimalbruch

umformt (§ 103, 3) und den Zähler des letzteren durch den des gegebenen Bruches dividirt.

§ 107.

1. Unter einem gemeinen Bruche versteht man im engeren Sinne des Wortes einen Bruch, dessen Nenner keine Potenz von 10 ist; im weiteren Sinne rechnet man zu den gemeinen Brüchen auch die Decimalbrüche, wenn sie nicht in der ihnen eigenthümlichen systematischen Form, sondern in der gewöhnlichen Quotientenform geschrieben sind (vgl. § 84, 2).

2. Jeder gemeine Bruch im engeren Sinne kann in einen Decimalbruch verwandelt werden indem man seinen Zähler nach § 103, 3 in einen Decimalbruch umformt und diesen nach § 106, 1 und 2 mit dem Nenner des gemeinen Bruches dividirt. So ist z. B. $\frac{3}{4} = \frac{3{,}0}{4} = \frac{30}{10} : 4 = \frac{30 : 4}{10}$ oder, da 4 in 30 nicht aufgeht, $= \frac{3{,}00}{4} = \frac{300}{100} : 4 = \frac{300 : 4}{100} = \frac{75}{100} = 0{,}75$. Ebenso $\frac{5}{4} = \frac{5{,}0}{4} = \frac{50}{10} : 4 = \frac{50 : 4}{10} = \frac{500 : 4}{100} = \frac{125}{100} = 1{,}25$.

3. Die Umformung des Zählers in einen Decimalbruch beruht, wie schon aus § 103, 3 erhellt, darauf, daß man sich den Zähler mit einer Potenz von 10 multiplicirt und das Produkt wieder mit dieser Potenz dividirt denkt (vgl. § 34, 3). Enthält nun der Nenner des gemeinen Bruches keine andren Primfaktoren als 2 oder 5 oder 2 und 5, die Primfaktoren von 10, und ist die höchste Potenz, auf welcher diese Primfaktoren in ihm vorkommen, die mte, so ist jedenfalls 10^m durch ihn theilbar (§ 96, 2); wenn man daher den Zähler mit dieser Potenz von 10 multiplicirt (m Nullen anhängt), so geht die Division jedenfalls auf, mag übrigens der Zähler selbst zum Nenner theilerverwandt oder theilerfremd sein (§ 95, 1) Wenn aber der Nenner des gemeinen Bruches andre Primfaktoren als 2 und 5 oder außer 2 und 5 enthält, so ist keine Potenz von 10 durch diese andren Primfaktoren theilbar (§ 95, 2; 96, 4); die Division kann also nur dann aufgehn, wenn auch der Zähler des Bruches selbst alle diese andren Primfaktoren enthält.

4. Ist Letzteres nicht der Fall, so bleibt, wie weit man auch die Division fortsetzen möge, immer ein Rest (§ 95, 2). Indessen ist wenigstens die Anzahl verschiedner Reste, die sich hiebei ergeben können, nach § 92, 3 eine beschränkte. Da nun, sobald das Anhängen von Nullen im Zähler begonnen hat, bei fortgesetzter Division zu jedem Reste dieselbe Ziffer aus dem Dividenden, nämlich Null, hinzutritt, so muß, wenn ein schon dagewesener Rest, wie dies bei der beschränkten Anzahl verschiedner Reste nicht ausbleiben kann, wiederkehrt, auch im Quotienten dieselbe Ziffer, die sich bei diesem Reste als die nächstfolgende ergab, wiederkehren, und überhaupt kann sich von hier an immer nur

die schon dagewesene Reihe von Resten und zugehörigen Quotientenziffern wiederholen. Eine solche wiederkehrende Folge von Quotientenziffern nennt man eine Periode. Dieselbe kann natürlich nie mehr Ziffern in sich begreifen als verschiedne Reste möglich sind d. h. als der um 1 verminderte Bruchnenner angiebt; oft umfaßt sie aber weit weniger. Ist einmal die Periode bekannt, so kann man durch wiederholtes Anschreiben derselben ohne wirklich fortgesetzte Division den Decimalbruch auf so viele Stellen ausdehnen als man will.

5. Ein gemeiner Bruch, dessen Nenner keine andren Primfaktoren als 2 oder 5 oder 2 und 5 enthält, giebt bei der Verwandlung in einen Decimalbruch nothwendig einen endlichen d. h. auf eine bestimmte Anzahl Stellen beschränkten Decimalbruch, da in diesem Falle die Division aufgehn muß (N. 3); alle andren gemeinen Brüche geben nach N. 4 unendliche und zwar periodische Decimalbrüche. Diese periodischen Decimalbrüche sind theils reinperiodische (oder vollständig periodische), bei denen die periodische Wiederkehr der Ziffern gleich mit der ersten Decimalstelle beginnt, theils gemischtperiodische (oder unvollständig periodische), bei denen der ersten Periode noch eine Decimalziffer oder einige Decimalziffern, die nicht zur Periode gehören und die man Vorziffern nennen kann, vorausgehn.

§ 108.

1. Ein endlicher Decimalbruch wird in einen gemeinen Bruch im weiteren Sinne des Wortes (§ 107, 1) umgeformt indem man ihn in der gewöhnlichen Quotientenform anschreibt. Sind Zähler und Nenner theilerverwandt, so ergiebt sich durch die Division beider mit ihrem größten Gemeintheiler ein gemeiner Bruch im engeren Sinne.

2. Ein periodischer Decimalbruch kann in einen gemeinen Bruch (im engeren Sinne) verwandelt werden, sobald man die Periode ihrem ganzen Umfange nach kennt. Und zwar ist ein reinperiodischer Decimalbruch zunächst gleich einem gemeinen Bruche, der die Periode zum Zähler und eine Neunerzahl (§ 98, 1) von so vielen Stellen als die Periode umfaßt zum Nenner hat. Denn wenn man den Decimalbruch mit einer Potenz von 10, deren Exponent der Stellenanzahl der Periode gleich ist, multiplicirt (§ 105, 2), so wird z. B. 0,123123123 . . . . zu 123,123123 . . . .; subtrahirt man hievon den gegebenen Decimalbruch, so ergiebt sich $123{,}123123\ldots - 0{,}123123\ldots = 0{,}123123\ldots \times (10^3 - 1) = 0{,}123123\ldots \times 999 = 123$, also (§ 50, 1) $0{,}123123\ldots = \frac{123}{999}$, was sich weiterhin auf $\frac{41}{333}$ reduciren läßt.

3. Ein gemischtperiodischer Decimalbruch ist zunächst gleich einem gemeinen Bruche, dessen Zähler die Differenz zwischen der durch die Vorziffern und die erste Periode zusammen und der durch die Vorziffern allein ausgedrückten Zahl ist und dessen Nenner mit so vielen Neunen als die Periode Stellen umfaßt und so vielen angehängten Nullen als Vorziffern sind geschrieben wird. Denn multiplicirt man den Decimalbruch erst mit einer Potenz von 10, deren Exponent der Anzahl der

Vorziffern und der Periodenziffern zusammen gleich ist, so wird z. B. 0,85123123123 . . . zu 85123, 123123 . . . .; multiplicirt man ihn dann mit einer Potenz von 10, deren Exponent nur der Anzahl der Vorziffern gleich ist, so wird 0,85123123123 . . . zu 85,123123 . . .; subtrahirt man letzteres Produkt von ersterem, so ergiebt sich 85123,123123 . . . — 85,123123 = 0,85123123 . . . $\times$ $(10^5 - 10^2)$ = 0,85123123 . . . $\times$ $((10^3 - 1) . 10^2)$ = 0,85123123 . . . $\times$ (999 . 100) = 0,85123123 . . . $\times$ 99900 = 85123 — 85 = 85038, also 0,85123123 . . . = $\frac{85038}{99900}$, was sich weiter auf $\frac{14173}{16650}$ reduciren läßt.

§ 109.

1. Wenn man bei irgend einer Stelle eines Decimalbruches abbricht d. h. die noch folgenden Stellen wegläßt, so ist ein solcher abgekürzter Decimalbruch dem gegebenen natürlich nicht völlig, sondern nur annähernd gleich, immer etwas zu klein; er kommt aber dem wahren Werthe um so näher, je mehr Stellen man beibehält. Denn ist die letzte beibehaltene Stelle die mte, so ist nach § 85, 2 der Betrag aller weggelassenen Stellen jedenfalls $< 1 . 10^{-m}$ oder $< \frac{1}{10^m}$; je größer aber m und mithin 10^m, desto kleiner $\frac{1}{10^m}$ (§ 45, 4).

2. Wenn die auf die letzte beibehaltene Decimalziffer zunächst folgende Ziffer 5, 6, 7, 8, 9 ist, so pflegt man für jene die nächstgrößere zu setzen. Es beruht dies auf der Bemerkung, daß z. B. 0,457 — 0,456719328 kleiner als 0,456719328 — 0,456 ist; daß man also dem wahren Werthe von 0,456719328 näher kommt, wenn man 0,457, als wenn man 0,456 dafür setzt; während dagegen z. B. 0,457 — 0,456179328 größer als 0,456179328 — 0,456, also der Werth von 0,456179328 durch 0,456 genauer ausgedrückt ist als er es durch 0,457 sein würde.

Viertes Kapitel. Numerische Potenzirung und Radicirung.

§ 110.

1. Das numerische Potenziren besteht in der Herstellung eines Ziffernausdruckes für die Potenz, wenn Grundzahl und Exponent in Ziffern ausgedrückt sind. Sind Grundzahl und Exponent ganze Zahlen, so findet man den Ausdruck für die Potenz indem man die Grundzahl erst mit sich selbst multiplicirt (§ 89), dann, wenn eine höhere als die zweite Potenz berechnet werden soll, dieses Produkt wieder mit der

Grundzahl multiplicirt u. s. f. — Ist die Grundzahl ein Bruch, so hat man die durch den Exponenten bezeichnete Potenz des Zählers und des Nenners nach dem eben Gesagten zu berechnen und erstere durch letztere zu dividiren (§ 53, 1). — Ist die Grundzahl ein Decimalbruch, so potenzirt man den Zähler und sondert im Ergebnisse so viele Decimalstellen ab als das Produkt des Exponenten und der Stellenzahl des gegebenen Bruches angiebt. Denn bezeichnet man den Zähler mit a und die Stellenzahl mit m, so ist der Bruch $= \frac{a}{10^m}$; soll nun derselbe mit n potenzirt werden, so ergiebt sich $\left(\frac{a}{10^m}\right)^n = \frac{a^n}{(10^m)^n} = \frac{a^n}{10^{mn}}$. — Ist der Exponent ein Bruch, so kommt die Potenzirung zum Theil auf Radicirung hinaus (§ 70), wovon im Folgenden.

2. Nach dem dekadischen Systeme ist, wenn m irgend eine ganze Zahl von 1 an bedeutet, 10^m die kleinste mit $m + 1$ Ziffern geschriebene Zahl; so z. B. $10^1 = 10$ die kleinste mit 2, $10^2 = 100$ die kleinste mit 3, $10^3 = 1000$ die kleinste mit 4 Ziffern geschriebene Zahl. Die nte Potenz von 10^m, also 10^{mn}, ist hienach die kleinste mit $mn + 1$ Ziffern geschriebene Zahl. Ist nun a eine von 10^m verschieden mit $m + 1$ Ziffern geschriebene Zahl, so ist $10^m < a < 10^{m+1}$; mithin (§ 65, 1) $10^{mn} < a^n < 10^{(m+1)n}$; folglich wird a^n wenigstens, wie 10^{mn}, mit $mn + 1$ Ziffern, aber höchstens mit einer Ziffer weniger als $10^{(m+1)n}$ d. h. mit $(m + 1)n = mn + n$ Ziffern geschrieben. Hienach kann man auch aus der Ziffernanzahl von a^n auf die von a zurückschließen. Ist nämlich erstere ein Vielfaches von n, $= (m + 1)n$, so ergiebt sich daraus durch Division mit n unmittelbar die Ziffernanzahl von a als $= m + 1$. Ist aber die Ziffernanzahl von a^n kein Vielfaches von n, sondern hat sie (vgl. § 42, 3; 43, 3) die Form $mn + 1, mn + 2, \ldots, mn + (n - 1)$, so nehme man dafür das nächstgrößere Vielfache von n, nämlich $mn + n = (m + 1)n$ und dividire dies mit n, um, wie vorhin, die Ziffernanzahl von a, nämlich $m + 1$, zu erhalten.

§ 111.

1. Wenn nun aus einer in Ziffern ausgedrückten Zahl die Quadratwurzel gezogen, d. h. der numerische Ausdruck derjenigen Zahl gefunden werden soll, welche, mit 2 potenzirt, die gegebene Zahl liefert, so hat man zunächst nach § 110, 2 aus der Ziffernanzahl des Radikanden die Ziffernanzahl der Wurzel zu bestimmen, wobei sich ergiebt, daß die Wurzel eines 1- bis 2ziffrigen Radikanden mit 1 Ziffer, die eines 3- bis 4ziffrigen mit 2 Ziffern, die eines 5- bis 6ziffrigen mit 3 Ziffern u. s. f. geschrieben wird.

2. Versteht man unter a, b, c . . . x, y, z bloß einziffrige Zahlen, so läßt sich ein 3ziffriger Radikand unter der allgemeinen Form $a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0$, ein 4ziffriger unter der Form $a \cdot 10^3 +$

$b . 10^2 + c . 10^1 + d . 10^0$ u. s. f., ebenso eine 2ziffrige Wurzel unter der Form $x . 10^1 + y . 10^0$, eine 3ziffrige unter der Form $x . 10^3 + y . 10^1 + z . 10^0$ u. s. f. darstellen.

3. Wenn es sich daher um Ausziehung einer Quadratwurzel handelt, so gehört nach Nr. 1 und 2 zu einem Radikanden $a . 10^2 + b . 10^1 + c . 10^0$ oder $a . 10^3 + b . 10^2 + c . 10^1 + d . 10^0$ eine Wurzel $x . 10^1 + y . 10^0$; ferner zu einem Radikanden $a . 10^4 + b . 10^3 + c . 10^2 + d . 10^1 + e . 10^0$ oder $a . 10^5 + b . 10^4 + c . 10^3 + d . 10^2 + e . 10^1 + f . 10^0$ eine Wurzel $x . 10^2 + y . 10^1 + z . 10^0$. Es ist aber (vgl. § 61, 1) das Quadrat von $x . 10^1 + y . 10^0 = x^2 . 10^2 + 2 x y . 10^1 + y^2 . 10^0$. Vergleicht man dies mit dem Radikanden $a . 10^2 + b . 10^1 + c . 10^0$ oder $a . 10^3 + b . 10^2 + c . 10^1 + d . 10^0 = (a . 10 + b) . 10^2 + c . 10^1 + d . 10^0$, so wird man zunächst darauf geführt, daß wohl im ersten Falle $x^2 = a$, $2xy = b$, $y^2 = c$, im zweiten $x^2 = a . 10 + b$, $2xy = c$, $y^2 = d$ sein werde. Dies ist nun zwar nicht streng richtig; man kann aber dennoch, von dieser Vergleichung ausgehend, aus jeder 3- und mehrziffrigen Zahl die Quadratwurzel ziehen, sobald man sich die Quadrate aller 1ziffrigen Zahlen einfürallemal berechnet und eingeprägt hat.

4. Es sei z. B. aus $784 = 7 . 10^2 + 8 . 10^1 + 4 . 10^0$ die Quadratwurzel zu ziehen. Vergleicht man diesen numerischen Ausdruck mit dem allgemeinen Ausdrucke des Quadrates der Wurzel, so müßte $7 = x^2$, $8 = 2xy$, $4 = y^2$ sein. Weil aber 7 keine Quadratzahl, keine zweite Potenz einer eigentlichen Zahl, ist, so nimmt man für x^2 die nächstkleinere Quadratzahl $4 = 2^2$, und denkt sich hienach $7 . 10^2 + 8 . 10^1$ in $(4 + 3) . 10^2 + 8 . 10^1 = 4 . 10^2 + (3 . 10^2 + 8 . 10^1) = 4 . 10^2 + (3 . 10 + 8) . 10^1 = 4 . 10^2 + 38 . 10^1$ verwandelt. Ist nun $x = 2$, so schließt man weiter, daß $2xy = 2 . 2y = 38$, folglich (§ 50, 1) $y = \frac{38}{2 . 2}$ sein müsse. Dies giebt, indem man für den unechten Bruch die nächstkleinere ganze Zahl nimmt, $y = 9$, $2xy = 36$, und indem man $38 . 10^1 + 4 . 10^0$ in $(36 + 2) . 10^1 + 4 . 10^0 = 36 . 10^1 + (2 . 10^1 + 4 . 10^0) = 36 . 10^1 + (2 . 10 + 4) . 10^0 = (36 . 10^1) + 24 . 10^0$ umformt, müßte $y^2 = 24$ sein. Weil aber vielmehr $y^2 = 9^2 = 81, > 24$ ist, so geht hieraus hervor, daß für y nicht 9, sondern eine kleinere Zahl anzunehmen sei. Versucht man es mit 8, so ist $2xy = 32$, $38 . 10^1 + 4 . 10^0 = (32 + 6) . 10^1 + 4 . 10^0 = 32 . 10^1 + (6 . 10^1 + 4 . 10^0) = 32 . 10^1 + (6 . 10 + 4 .) 10^0 = 32 . 10^1 + 64 . 10^0$, und nun ist wirklich $y^2 = 8^2 = 64$, folglich $\sqrt{784} = 2 . 10^1 + 8 . 10^0 = 28$.

5. Ist die Wurzel 3ziffrig, so ist $(x . 10^2 + y . 10^1 + z . 10^0)^2 = ((x . 10^2 + y . 10^1) + z . 10^0)^2 = (x . 10^2 + y . 10^1)^2 + 2 . (x . 10^2 + y . 10^1) z . 10^0 . + z^2 . 10^0 = x^2 . 10^4 + 2xy . 10^3 + y^2 . 10^2 + 2 . (x . 10 + y) . z . 10^1 + z^2 . 10^0$. Soll nun z. B. aus $725904 = 7 . 10^5 + 2 . 10^4 + 5 . 10^3 + 9 . 10^2 + 0 . 10^1 + 4 . 10^0$ die Quadratwurzel gezogen werden, so giebt die Vergleichung mit der allgemeinen Form des Quadrates der Wurzel zunächst

$7 . 10^5 + 2 . 10^4 = 72 . 10^4$, mithin $x^2 = 72$, ferner $2xy = 5$ u. s. f. Weil aber 72 keine Quadratzahl ist, so nimmt man für x^2 die nächstkleinere Quadratzahl $64 = 8^2$, wonach $72 . 10^4 + 5 . 10^3 = (64 + 8) . 10^4 + 5 . 10^3 = 64 . 10^4 + 85 . 10^3$. Ist nun $x = 8$, so wird, schließt man weiter, $2 . 8y = 85$, somit $y \frac{85}{2 . 8}$ sein. Dies giebt $y = 5$, $2xy = 2 . 8 . 5 = 80$, $85 . 10^3 + 9 . 10^2 = (80 + 5) . 10^3 + 9 . 10^2 = 80 . 10^3 + 59 . 10^2$; da nun $y^2 = 25$, so folgt weiter $(25 + 34) . 10^2 + 0 . 10^1 = 25 . 10^2 + 340 . 10^1$, wovon der zweite Summand mit $2 . (x . 10 + y) . z . 10^1$ zu vergleichen ist. Hienach erhält man $2 . (8 . 10 + 5) . z = 340$, $z = \frac{340}{2 . 85}$, somit $z = 2$, $z^2 = 4$; da nun vom Radikanden nur noch der Summand $4 . 10^0$, der mit $z^2 . 10^0$ zu vergleichen, übrig ist, so ist wirklich $\sqrt{725904} = 8 . 10^2 + 5 . 10^1 + 2 . 10^0 = 852$.

6. Auf ganz ähnliche Weise kann auch jede 4- und mehrziffrige Quadratwurzel ausgezogen werden.

§ 112.

1. Soll aus einer in Ziffern ausgedrückten Zahl die **Kubikwurzel** gezogen werden, so ergiebt sich zuvörderst nach § 110, 2, daß die Wurzel eines 1- bis 3ziffrigen Radikanden mit 1 Ziffer, die eines 4- bis 6ziffrigen mit 2 Ziffern, die eines 7- bis 9ziffrigen mit 3 Ziffern u. s. f. geschrieben wird. Demnach gehört (vgl. § 111, 2 und 3) zu einem Radikanden von der Form $a . 10^3 + b . 10^2 + c . 10^1 + d . 10^0$ oder $a . 10^4 + b . 10^3 + c . 10^2 + d . 10^1 + e . 10^0$ oder $a . 10^5 + b . 10^4 + c . 10^3 + d . 10^2 + e . 10^1 + f . 10^0$ eine Wurzel von der Form $x . 10^1 + y . 10^0$. Es ist aber (vgl. § 61, 5) der Kubus von $x . 10^1 + y . 10^0 = x^3 . 10^3 + 3x^2y . 10^2 + 3xy^2 . 10^1 + y^3 . 10^0$. Vergleicht man dies mit dem Radikanden $a . 10^3 \ldots$ oder $a . 10^4 + b . 10^3 \ldots = (a . 10 + b) . 10^3 \ldots$ oder $a . 10^5 + b . 10^4 + c . 10^3 \ldots = (a . 10^2 + b . 10 + c .) 10^3 \ldots$, so scheint zunächst a oder $a . 10 + b$ oder $a . 10^2 + b . 10 + c = x^3$ sein zu müssen u. s. f. Wiewohl dies nun wieder nicht streng richtig ist (vgl. § 111, 3), so kann man doch, von dieser Vergleichung ausgehend, die Kubikwurzeln aller 4- und mehrziffrigen Zahlen ermitteln, nachdem man sich die Kuben aller 1ziffrigen Zahlen einfürallemal berechnet und gemerkt hat.

2. Es sei z. B. aus $50653 = 5 . 10^4 + 0 . 10^3 + 6 . 10^2 + 5 . 10^1 + 3 . 10^0$ die Kubikwurzel zu ziehen. Hier ergiebt die Vergleichung mit dem allgemeinen Ausdrucke des Kubus der Wurzel zunächst $x^3 = 50$. Weil aber 50 keine **Kubikzahl**, keine dritte Potenz einer eigentlichen Zahl ist, so nimmt man für x^3 die nächstkleinere Kubikzahl $27 = 3^3$, wonach $50 . 10^3 + 6 . 10^2 = (27 + 23) . 10^3 + 6 . 10^2 = 27 . 10^3 + 236 . 10^2$ wird. Ist nun $x = 3$, so wird $3 . 3^2 y = 236$, $y = \frac{236}{3 . 3^2}$ sein müssen, und indem man für diesen un-

echten Bruch die nächstkleinere ganze Zahl nimmt, ergiebt sich $y = 8$, $3\,x^2\,y = 216$, $236 \,.\, 10^2 + 5 \,.\, 10^1 = (216 + 20) \,.\, 10^2 + 5 \,.\, 10^1 = 216 \,.\, 10^2 + 205 \,.\, 10^1$; ferner $3\,x\,y^2 = 576$; weil aber dies > 205, so erhellt, daß $y < 8$ sein müsse; setzt man versuchsweise $y = 7$, so wird $3\,x^2\,y = 189$, $236 \,.\, 10^2 + 5 \,.\, 10^1 = (189 + 47) \,.\, 10^2 + 5 \,.\, 10^1 = 189 \,.\, 10^2 + 475 \,.\, 10^1$; ferner $3\,x\,y^2 = 441$, $475 \,.\, 10^1 + 3 \,.\, 10^0 = (441 + 34) \,.\, 10^1 + 3 \,.\, 10^0 = 441 \,.\, 10^1 + 343 \,.\, 10^0$; endlich $y^3 = 343$; also wirklich $\sqrt[3]{50653} = 3 \,.\, 10^1 + 7 \,.\, 10^0 = 37$.

3. Ist die Wurzel 3ziffrig, so ist $(x \,.\, 10^2 + y \,.\, 10^1 + z \,.\, 10^0)^3 = ((x \,.\, 10^2 + y \,.\, 10^1) + z \,.\, 10^0)^3 = (x \,.\, 10^2 + y \,.\, 10^1)^3 + 3\,(x \,.\, 10^2 + y \,.\, 10^1)^2 z \,.\, 10^0) + 3\,(x \,.\, 10^2 + y \,.\, 10^1)\,z^2 \,.\, 10^0 + z^3 \,.\, 10^0 = (x \,.\, 10^2 + y \,.\, 10^1)^3 + 3\,(x \,.\, 10 + y)^2 \,.\, 10^2 \,.\, z \,.\, 10^0 + 3\,(x \,.\, 10 + y) \,.\, 10^1 \,.\, z^2 \,.\, 10^0 + z^3 \,.\, 10^0 = x^3 \,.\, 10^6 + 3\,x^2\,y \,.\, 10^5 + 3\,x \,.\, y^2 \,.\, 10^4 + y^3 \,.\, 10^3 + 3\,(x \,.\, 10 + y)^2 z \,.\, 10^2 + 3\,(x \,.\, 10 + y)\,z^2 \,.\, 10^1 + z^3 \,.\, 10^0$. Soll nun z. B. aus $3176523 = 3 \,.\, 10^6 + 1 \,.\, 10^5 + 7 \,.\, 10^4 + 6 \,.\, 10^3 + 5 \,.\, 10^2 + 2 \,.\, 10^1 + 3 \,.\, 10^0$ die Kubikwurzel gezogen werden, so giebt die Vergleichung mit der allgemeinen Form des Kubus der Wurzel zunächst $x^3 = 3$. Weil aber 3 keine Kubikzahl, so nimmt man für x^3 die nächstkleinere Kubikzahl $1 = 1^3$, wonach $3 \,.\, 10^6 + 1 \,.\, 10^5 = (1 + 2) \,.\, 10^6 + 1 \,.\, 10^5 = 1 \,.\, 10^6 + 21 \,.\, 10^5$. Ist nun $x = 1$, so wird $3 \,.\, 1^2\,y = 21$ sein müssen. Nimmt man aber hienach $y = 7$ an, so wäre $3\,x\,y^2 = 147$, also weit größer als der Koefficient 7 des nächsten Summanden; auch $y = 6$ giebt $3\,x^2\,y = 18$; formt man hienach $21 \,.\, 10^5 + 7 \,.\, 10^4$ in $(18 + 3) \,.\, 10^5 + 7 \,.\, 10^4 = 18 \,.\, 10^5 + 37 \,.\, 10^4$ um, so ist $3\,x\,y^2 = 108 > 37$; versucht man es nun mit $y = 5$, so ist $3\,x^2\,y = 15$, $21 \,.\, 10^5 + 7 \,.\, 10^4 = (15 + 6) \,.\, 10^5 + 7 \,.\, 10^4 = 15 \,.\, 10^5 + 67 \,.\, 10^4$, $3\,x\,y^2 = 75 > 67$; versucht man es aber mit 4, so ist $3\,x^2\,y = 12$, $21 \,.\, 10^5 + 7 \,.\, 10^4 = (12 + 9) \,.\, 10^5 + 7 \,.\, 10^4 = 12 \,.\, 10^5 + 97 \,.\, 10^4$, $3\,x\,y^2 = 48 < 97$; ferner $97 \,.\, 10^4 + 6 \,.\, 10^3 = (48 + 49) \,.\, 10^4 + 6 \,.\, 10^3 = 48 \,.\, 10^4 + 496 \,.\, 10^3$; da nun $y^3 = 64$, so ergiebt sich weiter $496 \,.\, 10^3 + 5 \,.\, 10^2 = (64 + 432) \,.\, 10^3 + 5 \,.\, 10^2$ und $432 \,.\, 10^3 + 5 \,.\, 10^2 = 4325 \,.\, 10^2$. Da dies mit $3\,(x \,.\, 10 + y)^2\,z \,.\, 10^2$ zu vergleichen ist, so folgt $z = \frac{4325}{3 \,.\, 14^2} = 7$, indem man für den unechten Bruch die nächstkleinere ganze Zahl nimmt, und es ist nun weiter $4325 \,.\, 10^2 + 2 \,.\, 10^1 = (4116 + 209) \,.\, 10^2 + 2 \,.\, 10^1 = 4116 \,.\, 10^2 + 2092 \,.\, 10^1$, $3\,(x \,.\, 10 + y)\,z^2 = 2058$, $2092 \,.\, 10^1 + 3 \,.\, 10^0 = (2058 + 34) \,.\, 10^1 + 3 \,.\, 10^0$ und $34 \,.\, 10^1 + 3 \,.\, 10^0 = 343 \,.\, 10^0$, und da $z^3 = 343$, so ist wirklich $\sqrt[3]{3176523} = 1 \,.\, 10^2 + 4 \,.\, 10^1 + 7 \,.\, 10^0 = 147$.

4. Auf ganz ähnliche Weise kann auch jede 4- und mehrziffrige Kubikwurzel ausgezogen werden.

§ 113.

1. Die Quadratwurzel eines gemeinen Bruches $\frac{m}{n}$ ist (§ 68, 1) $= \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, ebenso die Kubikwurzel $= \frac{\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{n}}$. Man sucht nun vor allem zu ermitteln, ob n eine wirkliche Quadrat- oder Kubikzahl, oder ob $\sqrt{n}$ oder $\sqrt[3]{n}$ irrational ist, wobei § 97—100 in Anwendung kommt. Ist $\sqrt{n}$ oder $\sqrt[3]{n}$ irrational, so macht man diesen Divisor rational (§ 76, 3), wodurch der Dividend $\sqrt{m}$ oder $\sqrt[3]{m}$ oder (§ 67, 2) der Zähler m eine entsprechende Veränderung erleidet, indem nämlich zu m alle die neuen Faktoren hinzutreten, womit im Divisor der Radikand multiplicirt werden mußte, um eine wirkliche Quadrat- oder Kubikzahl hervorzubringen; hierauf radicirt man den so veränderten Zähler und dividirt seine Wurzel mit dem rational gemachten Divisor. Z. B. $\sqrt{\frac{23}{60}}$ ist $=$

$$\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{60}} = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{2.2.3.5}} = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{23}\,.\,\sqrt{15}}{2\,.\,15} \text{ (§ 68, 6),}$$

also $= \frac{\sqrt{23\,.\,15}}{2\,.\,15}$. Ferner ist z. B. $\sqrt[3]{\frac{137}{180}} = \frac{\sqrt[3]{137}}{\sqrt[3]{2.2.2.3.3.5}}$

$$= \frac{\sqrt[3]{137}}{2\,.\sqrt[3]{3^2}\,.\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{137}\,.\,\sqrt[3]{3^{3-2}}\,.\,\sqrt[3]{5^{3-1}}}{2\,.\,\sqrt[3]{3^2}\,.\,\sqrt[3]{3^{3-2}}\,.\,\sqrt[3]{5}\,.\,\sqrt[3]{5^{3-1}}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{137}\,.\,\sqrt[3]{3}\,.\,\sqrt[3]{5^2}}{2\,.\,\sqrt[3]{3^3}\,.\,\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{137\,.\,3\,.\,5^2}}{2\,.\,3\,.\,5}.$$

2. Aus einem Decimalbruch wird die Quadrat- oder Kubikwurzel ebenfalls auf die Art ausgezogen, daß man vor allem die Wurzel des Nenners rational macht, wenn sie es nicht schon ist, dann den (veränderten) Zähler radicirt und diese Wurzel durch die aus dem Nenner dividirt. Das Rationalmachen der Wurzel des Nenners geschieht hier aber dadurch, daß man denselben durch Multiplikation mit 10 oder 10^2 zu einer Potenz von 10 macht, deren Exponent durch 2 oder 3 theilbar ist; was in Bezug auf den Ziffernausdruck so viel heißt als (in Gedanken) dem Nenner noch eine Null oder zwei Nullen rechts anhängen, damit die Anzahl seiner Nullen durch 2 oder 3 theilbar werde. Nachdem man ebenso viele Nullen dem Zähler (wirklich) angehängt hat, radicirt man diesen wie gewöhnlich. Die Wurzel des Nenners wird dann durch 1 mit so vielen Nullen als die durch 2 oder 3 dividirte Nullenzahl des Nenners beträgt ausgedrückt, und die Division der Wurzel des Zählers durch die des Nenners wird dadurch angezeigt, daß man im Ausdrucke

der ersteren so viele Stellen durch einen Decimalstrich absondert als die Nullenzahl der letzteren ausmacht. So z. B. ist $\sqrt{0,123} = \frac{\sqrt{123}}{\sqrt{10^3}}$ $= \frac{\sqrt{123 \,.\, 10}}{\sqrt{10^3 \,.\, 10}} = \frac{\sqrt{1230}}{\sqrt{10^4}} = \frac{\sqrt{1230}}{10^2}$; ebenso $\sqrt[3]{0,12345} =$ $\frac{\sqrt[3]{12345}}{\sqrt[3]{10^5}} = \frac{\sqrt[3]{12345 \,.\, 10}}{\sqrt[3]{10^5 \,.\, 10}} = \frac{\sqrt[3]{123450}}{\sqrt[3]{10^6}} = \frac{\sqrt[3]{123450}}{10^2}$

und $\sqrt[3]{0,1234} = \frac{\sqrt[3]{1234}}{\sqrt[3]{10^4}} = \frac{\sqrt[3]{1234 \,.\, 10^2}}{\sqrt[3]{10^4 \,.\, 10^2}} = \frac{\sqrt[3]{123400}}{\sqrt[3]{10^6}} =$ $\frac{\sqrt[3]{123400}}{10^2}$.

§ 114.

1. Wenn die Quadrat- oder Kubikwurzel aus einer Zahl gezogen werden soll, welche keine wirkliche Quadrat- oder Kubikzahl ist, so ermittelt man erst die Wurzel aus der nächstkleineren Quadrat- oder Kubikzahl, wobei vom Radikanden ein Rest der Radicirung übrig bleibt. Um sich dann dem Werthe der gesuchten irrationalen Wurzel mehr und mehr zu nähern (oder zu der gefundenen rationalen Wurzel die irrationale Ergänzung so genau als man will zu bestimmen, § 75, 2), kann man den Radikanden mit 10^2 oder 10^3 so oft als man will multipliciren (an seinen Ziffernausdruck so oft als man will 2 oder 3 Nullen anhängen), mit dem Ausziehen der Wurzel ganz in der bisherigen Weise fortfahren und endlich im Ausdrucke der Wurzel so viele Decimalstellen absondern als Faktoren $= 10^2$ oder $= 10^3$ zum Radikanden hinzugekommen sind. Hat man nämlich a solche Faktoren hinzutreten lassen, so ist der Radikand, wenn man ihn mit r bezeichnet $= \frac{r \,.\, 10^{2a}}{10^{2a}}$ oder $= \frac{r \,.\, 10^{3a}}{10^{3a}}$, folglich $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{r \,.\, 10^{2a}}}{\sqrt{10^{2a}}} = \frac{\sqrt{r \,.\, 10^{2a}}}{10^a}$ und $\sqrt[3]{r}$ $= \frac{\sqrt[3]{r \,.\, 10^{3a}}}{\sqrt[3]{10^{3a}}} = \frac{\sqrt[3]{r \,.\, 10^{3a}}}{10^a}$.

2. Dieser Weg, sich dem Werthe der Wurzel so weit man als man will zu nähern, kann auch dann eingeschlagen werden, wenn der Radikand schon ein Decimalbruch ist und nicht nach § 113, 2 vollständig radicirt werden kann.

3. Die decimalbruchförmigen Ausdrücke, die man auf diesem Wege für die Werthe irrationaler Wurzeln findet, können ebenso wenig jemals periodische Decimalbrüche werden als endliche Decimal-

brüche sein, da jeder periodische Decimalbruch so gut wie jeder endliche sich auf einen gemeinen Bruch zurückführen läßt, was bei einer irrationalen Wurzel nicht stattfinden kann (§ 96, 6).

4. Bezeichnet man den wahren (nie völlig genau zu findenden) Werth einer irrationalen Quadratwurzel mit w, den bis auf a Decimalstellen ermittelten Näherungswerth mit n, so ist w — n oder, wenn man hiefür d setzt, $d < \frac{1}{10^a}$ (vgl. § 109, 1). Alsdann ist w^2 d. h. der Radikand $= (n + d)^2 = n^2 + 2nd + d^2$, mithin $w^2 - n^2$ d. h. der letzte Rest der Radicirung $= 2nd + d^2$ und $\frac{w^2 - n^2}{2n} = d + \frac{d^2}{2n}$. Es ist aber, weil $d < \frac{1}{10^a}$, schon $d^2 < \left(\frac{1}{10^a}\right)^2$ oder $d^2 < \frac{1}{10^{2a}}$ (§ 65, 4) und um so mehr $\frac{d^2}{2n} < \frac{1}{10^{2a}}$. Demnach erhält man durch bloße Division des letzten Restes der Radicirung mit dem doppelten Näherungswerthe der Wurzel einen Quotienten, der um weniger als $\frac{1}{10^{2a}}$ größer ist als der Unterschied zwischen dem wahren Werthe und dem Näherungswerthe, und findet noch weitere a Decimalstellen für die schon auf a Stellen gefundne Wurzel, wenn man diesen Quotienten zu ihr addirt, indem $n + \frac{w^2 - n^2}{2n} = n + d + \frac{d^2}{2n} = w + \frac{d^2}{2n}$, also um weniger als $\frac{1}{10^{2a}}$ von w verschieden ist.

§ 115.

1. Wurzeln, deren Exponenten Produkte sind, welche bloß die Zahlen 2 und 3 zu Faktoren haben, können (vgl. § 71, 2) dadurch ausgezogen werden, daß man erst die Quadrat- oder Kubikwurzel auszieht, aus dieser Wurzel wieder die Quadrat- oder Kubikwurzel u. s. f. Wenn sich hiebei irrationale Wurzeln ergeben, so wird man nach § 111, 1; 112, 1; 114, 1; 109, 1 in jedem Falle leicht sehen, auf wie viele Decimalstellen man den ersten, zweiten, dritten Wurzelwerth u. s. f. zu berechnen hat, um den letzten auf eine gewisse Anzahl Stellen genau zu erhalten.

2. Wurzeln höherer Grade, deren Exponenten andre Zahlen als solche Produkte (N. 1) sind, würden sich zwar nach einem ähnlichen Verfahren, wie das in Vorstehendem für die Quadrat- und Kubikwurzel gelehrte, ausziehen lassen; da dies aber schon bei der Kubikwurzel schwierig zu werden anfängt (vgl. § 112, 3) und mit jedem höheren Grade schwieriger würde, so bedient man sich für Wurzeln höherer Grade und der Bequemlichkeit wegen, wo es sonst angeht, auch für die Quadrat- und Kubikwurzel andrer Verfahrungsarten, von denen später die Rede sein wird.

Drittes Buch.

Erstes Kapitel. Permutationen, Variationen, Kombinationen.

§ 116.

1. Sind eine Anzahl gleichartiger Dinge, z. B. Personen, Buchstaben, Zahlen, gegeben, so kann die Aufgabe gestellt werden, diese Dinge auf alle möglichen Arten in eine Reihe zu ordnen oder wenigstens die Zahl dieser verschiednen Anordnungen zu bestimmen. Namentlich in letzterer Hinsicht fällt diese Aufgabe ins Gebiet der Arithmetik; auch sind im Bisherigen schon mehrere Fälle vorgekommen, in welchen diese Aufgabe gestellt werden kann, vgl. § 8, 2; 17, 2. 3; 29, 1; 46, 2. Die wirkliche Darstellung der möglichen verschiednen Anordnungen nennt man das Permutiren, Versetzen, und jede solche Anordnung eine Permutation oder Versetzung der gegebenen Elemente, mit welchem letzteren Namen man im Allgemeinen die gegebenen gleichartigen Dinge bezeichnet.

2. Wählen wir beispielsweise Buchstaben zu Permutationselementen, so erhellt, daß zwei Buchstaben a und b nur 2 Permutationen zulassen, nämlich ab und ba. Kommt ein drittes Element c hinzu, so kann diesem in Verbindung mit jeder der 2 Permutationen ab und ba eine 3fache Stellung angewiesen werden, nämlich entweder vor den 2 Elementen derselben oder zwischen ihnen oder nach ihnen; man erhält daher die $2 . 3 = 6$ Permutationen cab, acb, abc, cba, bca, bac. Kommt ein viertes Element d hinzu, so kann diesem in Verbindung mit jeder der eben erhaltenen $2 . 3 = 6$ Permutationen eine 4fache Stellung gegeben werden, nämlich entweder vor den drei bisherigen Elementen oder zwischen dem ersten und zweiten oder zwischen dem zweiten und dritten oder nach den drei bisherigen Elementen; dadurch ergeben sich die $2 . 3 . 4 = 24$ Permutationen dcab, cdab, cadb, cabd, dacb, adcb, acdb, acbd, dabc, adbc, abdc, abcd, dcba, cdba, cbda, cbad, dbca, bdca, bcda, bcad, dbac, bdac, badc, bacd. Auf ganz ähnliche Weise lassen sich alle Permutationen von 5, 6 und mehr Elementen aus den bisherigen ableiten.

3. Demnach muß die Anzahl der Permutationen, die mit m Elementen vorgenommen werden können, $= 2 . 3 . 4 \times \ldots \times m$ oder $= 1 . 2 . 3 . 4 \times \ldots . \times m$ d. h. gleich dem Produkte aller Zahlen von 1 bis m sein, oder wenn man jene Anzahl durch mP andeutet, so ist $mP = 1 . 2 . 3 . 4 \times \ldots . \times m$. Dieses Produkt aber wird die Fakultät von m genannt und kurz durch m! bezeichnet, wonach $mP = m!$ ist.

4. Um die Permutationen gegebener Elemente darzustellen ohne erst die Permutationen für 2 Elemente zu bilden, dann aus diesen die für 3 Elemente abzuleiten u. s. f., verfährt man folgendermaßen. Zuerst werden sämmtliche Elemente gut geordnet d. h., wenn sie Buchstaben sind, in alphabetischer Ordnung oder, wenn sie Zahlen sind, nach der Reihenfolge der Zahlen aufgestellt; alsdann wird aus dieser ersten Permutation die zweite und aus dieser die dritte u. s. f. dadurch abgeleitet, daß man, von rechts nach links gehend, das erste sich darbietende Element, welches noch nicht das höchste d. h. das bei guter Ordnung letzte ist und dem auch noch nicht alle höheren d. h. bei guter Ordnung auf dasselbe folgenden Elemente vorangehn, durch das nächsthöhere der ihm noch nicht vorangehenden Elemente ersetzt, die links vorangehenden Elemente ungeändert läßt und die nach rechts folgenden Stellen mit den nun noch übrigen Elementen in guter Ordnung ausfüllt. So kommt man endlich auf eine Permutation, worin jedem Elemente schon alle höheren vorangehn, und damit ist die Darstellung aller möglichen Permutationen beendigt. Z. B. um alle Permutationen der Elemente a, b, c, d zu bilden, stellt man a b c d als erste auf; geht man hierin von rechts nach links, so ist c das erste Element, welches weder selbst das höchste ist noch alle höheren Elemente vor sich hat; man ersetzt es durch das nächsthöhere nicht vorangehende Element d, läßt die Elemente zur Linken a und b an ihrem Platze und füllt die offene Stelle rechts mit dem einzigen nun noch übrigen Elemente c aus, wodurch man die zweite Permutation a b d c erhält; indem man hier wieder von rechts nach links geht, ist b das erste Element, das weder selbst das höchste ist noch alle höheren Elemente vor sich hat; man ersetzt es durch das nächsthöhere nicht vorangehende Element c, läßt links das a stehn und füllt die Stellen rechts mit den noch übrigen Elementen b und d in guter Ordnung aus, wodurch sich die dritte Permutation a c b d ergiebt; so fortfahrend erhält man nach und nach a c d b, a d b c, a d c b, b a c d, b a d c, b c a d, b c d a, b d a c, b d c a, c a b d, c a d b, c b a d, c b d a, c d a b, c d b a, d a b c, d a c b, d b a c, d b c a, d c a b, endlich d c b a, womit alle 24 möglichen Permutationen (vgl. Nr. 1) dargestellt sind.

§ 117.

1. Ferner kann die Aufgabe gestellt werden, eine Anzahl gleichartiger Dinge oder Elemente auf alle möglichen Arten in Gruppen zu zweien, dreien u. s. f. zusammenzustellen oder wenigstens die Anzahl dieser möglichen Zusammenstellungen zu bestimmen. Namentlich in letzterer Hinsicht gehört auch diese Aufgabe ins Gebiet der Arithmetik. Die wirkliche Darstellung der möglichen Gruppen nennt man das Variiren und jede Gruppe eine Variation der gegebenen Elemente; dabei gilt jede Gruppe für verschieden von einer andren dieselben Elemente enthaltenden, wenn in jener die Elemente anders geordnet sind als in dieser. Den Inbegriff aller Variationen zu zweien, zu dreien u. s. f. nennt man die zweite, dritte Variationsklasse u. s. f.;

auch spricht man uneigentlicherweise von Variationen *erster* Klasse, worunter man die einzelnen gegebenen Elemente versteht.

2. Wählen wir wieder Buchstaben zu Elementen, so erhellt, daß *zwei* Buchstaben a und b nur $2 \,.\, 1 = 2$ Variationen zu *zweien* zulassen, da man sich nur an jedes der zwei Elemente das einzige noch vorhandne Element gereiht denken kann, entweder b an a oder a an b : ab oder ba. Aus *drei* Elementen a, b, c lassen sich, indem man nach und nach an jedes der 3 Elemente jedes der 2 übrigen reiht, $3 \,.\, 2 = 6$ Variationen zu *zweien* bilden, nämlich ab, ac, ba, bc, ca, cb. Aus *vier* Elementen a, b, c, d kann man, an jedes der 4 Elemente jedes der 3 übrigen fügend, $4 \,.\, 3 = 12$ Variationen zu *zweien* bilden, nämlich ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc u. s. f. Aus *drei* Elementen a, b, c lassen sich, indem man an jede der Variationen zu *zweien* das einzige noch nicht in ihr enthaltene Element fügt, $3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 6$ Variationen zu *dreien* bilden, nämlich abc, acb, bac, bca, cab, cba. Aus *vier* Elementen a, b, c, d erhält man, zu jeder der $4 \,.\, 3$ Variationen zu zweien jedes der 2 nicht darin enthaltenen Elemente fügend, $4 \,.\, 3 \,.\, 2 = 24$ Variationen zu *dreien*, nämlich abc, abd, acb, acd, adb, adc, bac, bad, bca, bcd, bda, bdc, cab, cad, cba, cbd, cda, cdb, dab, dac, dba, dbc, dca, dcb. Fügt man an jede dieser $4 \,.\, 3 \,.\, 2$ Variationen zu dreien das einzige nicht in ihr vorkommende Element, so ergeben sich aus *vier* Elementen $4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 24$ Variationen zu *vieren* u. s. f. Auf ganz ähnliche Art erhält man alle aus 5, 6 und mehr Elementen zu bildenden Variationen 2ter, dritter Klasse u. s. f., wobei natürlich die Zahl der Elemente, die in einer Variation enthalten sein sollen, oder, wie man wohl sagt, die *Klassennummer* nicht größer sein darf als die Zahl der gegebenen Elemente.

3. Die Anzahl der Variationen zu n für m Elemente wird somit gleich sein dem Produkte der n eigentlichen Zahlen von m an abwärts bis $m - (n - 1)$, oder, wenn man jene Anzahl durch mVn andeutet, so ist $mVn = m \,.\, (m-1) \,.\, (m-2) \times \ldots \times (m-(n-1))$. Ist daher $n = m$, so ist $mVm = m \,.\, (m - 1) \,.\, (m - 2) \times \ldots \times (m - (m - 1)) = m \,.\, (m - 1) \,.\, (m - 2) \times \ldots \times 1 = m!$ oder es ist $mVm = mP$ und die Variationen sind dann eins mit den Permutationen von m Elementen.

4. Ohne erst die Variationen zweiter Klasse zu bilden, dann aus diesen die der dritten abzuleiten u. s. f., kann man so verfahren, daß man, wenn n die Klassennummer ist, die n *niedrigsten* d. h. bei guter Ordnung ersten Elemente gut geordnet als erste Variation aufstellt, dann von rechts nach links gehend das erste Element, welches noch nicht das höchste ist und dem auch nicht schon alle höheren vorangehn, durch das nächsthöhere der nicht vorangehenden Elemente ersetzt, die Elemente links ungeändert läßt und die Stellen rechts mit der erforderlichen Anzahl niedrigster Elemente von den noch übrigen in guter Ordnung ausfüllt. So kommt man endlich auf eine Variation, welche die n höchsten Elemente in verkehrter Ordnung enthält, und damit ist die Darstellung der möglichen Variationen geschlossen.

§ 118.

1. Ordnet man die in § 117, 2 aufgestellten Variationen von 2, 3, 4 Elementen zu 2, 3, 4 so in Reihen, daß alle einander ähnlichen d. h. diejenigen, welche die nämlichen Elemente enthalten und sich nur durch deren verschiedne Anordnung unterscheiden, in einer Reihe beisammen stehn, so erhält man aus den 2 Variationen von 2 Elementen zu 2 eine einzige solche Reihe: ab, ba; aus den 6 Variationen von 3 Elementen zu 2 erhält man 3 Reihen: 1) ab, ba, 2) ac, ca, 3) bc, cb; aus den 12 Variationen von 4 Elementen zu 2 ergeben sich 6 Reihen: 1) ab, ba, 2) ac, ca, 3) ad, da, 4) bc, cb, 5) bd, db, 6) cd, dc; aus den 6 Variationen von 3 Elementen zu 3 erhält man eine einzige Reihe; aus den 24 Variationen von 4 Elementen zu 3 ergeben sich 4 Reihen: 1) abc, acb, bac, bca, cab, cba, 2) abd, adb, bad, bda, dab, dba, 3) acd, adc, cad, cda, dac, dca, 4) bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb; aus den 24 Variationen von 4 Elementen zu 4 ergiebt sich wieder nur eine Reihe. Sieht man nun ab von der verschiednen Anordnung der Elemente, d. h. betrachtet man alle in einer solchen Reihe enthaltenen Zusammenstellungen, da sie aus den nämlichen Elementen bestehn, als eine und dieselbe Gruppe und nimmt man von ihnen die gutgeordnete gleichsam als Vertreterinn aller übrigen heraus (die im Gegensatze zu jener schlechtgeordnete Zusammenstellungen heißen), so hat man die Variationen oder die Verbindungen mit Versetzungen auf Kombinationen oder Verbindungen ohne Versetzungen oder schlechthin Verbindungen zurückgeführt. Auch hier (vgl. § 117, 1) nennt man die aus 2, 3, 4 Elementen bestehenden Verbindungen Kombinationen der zweiten, dritten, vierten Klasse u. s. f.; ebenso nennt man die gegebenen einzelnen Elemente zusammen die erste Kombinationsklasse. Natürlich darf auch bei den Kombinationen die Zahl der Elemente, die in einer Verbindung enthalten sein sollen, nicht größer sein als die Zahl der gegebenen Elemente (vgl. § 117, 2).

2. Da jede der in N. 1 besprochenen Reihen offenbar alle Permutationen enthält, welche mit den in dieser Reihe auftretenden Elementen vorgenommen werden können, und da alle diese in einer Reihe enthaltenen Permutationen beim Kombiniren nur als eine Zusammenstellung gelten, so wird man die Zahl der möglichen Kombinationen gegebener Elemente erhalten, wenn man die Zahl der Variationen zu 2, 3 u. s. f., die aus diesen Elementen gebildet werden können, durch die Zahl der Permutationen, die man mit 2, 3 Elementen u. s. f. vornehmen kann, dividirt. Da nun 2 Elemente 2. 1 Variationen und 1 . 2 Permutationen geben, so muß $\frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = 1$ die Anzahl der Kombinationen zu 2 aus 2 Elementen sein; ebenso $\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$ die Anzahl der Kombinationen zu 2 aus 3 Elementen, $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ die Anzahl der Kom=

binationen zu 2 aus 4 Elementen, $\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1$ die Anzahl der Kombinationen zu 3 aus 3 Elementen, $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$ die Anzahl der Kombinationen zu 3 aus 4 Elementen, $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1$ die Anzahl der Kombinationen zu 4 aus 4 Elementen; wie denn wirklich nach N. 1 die 2 Elemente a und b nur die einzige Kombination 2ter Klasse a b, die 3 Elemente a, b, c die 3 Kombinationen 2ter Klasse a b, a c, b c und die einzige Kombination dritter Klasse a b c, die 4 Elemente a, b, c, d die 6 Kombinationen 2ter Klasse ab, ac, ad, bc, bd, cd und die 4 Kombinationen dritter Klasse abc, abd, acd, bcd und die einzige Kombination 4ter Klasse abcd geben. Allgemein ist, wenn man die Anzahl der möglichen Kombinationen zu n aus m Elementen durch m C n andeutet, $mCn = \frac{mVn}{nP} = \frac{m.(m-1).(m-2)\times\ldots\times(m-(n-1))}{n!}$

und wenn $n = m$, so ist $mCm = \frac{mVm}{mP} = \frac{m!}{m!} = 1$.

3. Ohne vorher die Variationen darzustellen u. s. w. verfährt man beim Kombiniren gegebener Elemente gleich so, daß man, wenn n die Klassennummer ist, die n niedrigsten Elemente in guter Ordnung zusammenstellt und aus dieser ersten Kombination die zweite u. s. f. dadurch ableitet, daß man von rechts nach links gehend das erste sich darbietende Element, welches selbst noch nicht das höchste ist und dem auch noch nicht alle höheren folgen (nicht, wie in § 116, 4 und 117, 4, vorangehn), durch das nächsthöhere ersetzt und (die Elemente zur Linken ungeändert lassend) die nach rechts folgenden Stellen mit der nöthigen Anzahl höherer Elemente in guter Ordnung ausfüllt. So kommt man endlich auf eine Kombination, welche die n höchsten Elemente gut geordnet enthält, und damit ist die Darstellung der möglichen Kombinationen geschlossen.

§ 119.

Wenn unter gegebenen Elementen, die permutirt werden sollen, gleiche, d. h. durch denselben Buchstaben oder dieselbe Zahl vorgestellte, sind, so wird dadurch die Anzahl der möglichen Permutationen verringert. So z. B. geben die Elemente a und b die Permutationen a b und b a; wird nun das b durch ein zweites a ersetzt, so wird sowohl die erste als die zweite Permutation zu a a; somit lassen 2 gleiche Elemente statt 1.2 nur $1 = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2}$ Anordnung zu. Die Elemente a, b, c geben die Permutationen a b c, a c b, b a c, b c a, c a b, c b a; wird das b in a verwandelt, so erhält man a a c, a c a, a a c, a c a, c a a, c a a oder es werden diejenigen Permutationen, welche sich nur durch die verschiedne Anordnung von a und b unterscheiden, einander gleich und statt 1.2.3 ergeben sich daher aus 3 Elementen, wovon 2 einander gleich sind, nur

$3 = \frac{1 . 2 . 3}{1 . 2}$ Permutationen. Wird auch c durch a ersetzt, so erhält man aus diesen 3 Permutationen a a c, a c a und c a a die einzige a a a; 3 gleiche Elemente lassen also statt 1 . 2 . 3 nur $1 = \frac{1 . 2 . 3}{1 . 2 . 3}$ Anordnung zu. Allgemein ist, wenn man die Anzahl der Permutationen von m Elementen, worunter n gleiche sind, durch $\frac{m}{n}$ P andeutet, $\frac{m}{n} P = \frac{m P}{n P} = \frac{m!}{n!}$. Ist daher n = m, so ist $\frac{m}{m} P = \frac{m P}{m P} = \frac{m!}{m!} = 1$. Sind unter den m Elementen außer n gleichen noch p von letzteren verschiedne, aber einander wieder gleiche, so ist $\frac{m}{n\,p} P = \frac{m P}{n P \times p P} = \frac{m}{n!\,p!}$ u. s. f. Die wirkliche Darstellung solcher Permutationen geschieht übrigens ganz nach der Regel in § 116, 4.

§ 120.

1. Sind mehrere Reihen von gleichvielen Elementen gegeben, so kann gefordert werden, aus diesen Elementen Gruppen zu bilden, von denen jede so viel Elemente als Reihen sind und zwar aus jeder Reihe ein Element enthalte, z. B. aus den Elementen a, b, c und d, e, f Gruppen wie a d, a e, a f, b d, b e u. s. f. zu bilden; oder es kann auch bloß gefragt werden, wie viel solche Gruppen möglich sind. In dem besondren Falle, daß die Elemente jeder Reihe unter sich verschieden, im Ganzen aber den Elementen aller übrigen Reihen gleich sind, nennt man die zu bildenden Gruppen Variationen mit Wiederholungen oder Wiederholungsvariationen, weil sich in diesem Falle immer auch solche Gruppen finden, die das nämliche Element wiederholt enthalten, und zum Unterschiede werden die in § 117 betrachteten Zusammenstellungen Variationen ohne Wiederholungen genannt. Je nachdem 2, 3 oder mehr Reihen von Elementen gegeben sind, mithin die Gruppen 2, 3 oder mehr Elemente enthalten, spricht man auch hier von Variationen zweiter, dritter Klasse u. s. f.

2. Hat man zwei Reihen von 2 Elementen a, b und a, b, wobei die Elemente der ersten Reihe durch ein angehängtes 1 und die der zweiten durch ein angehängtes 2 unterschieden werden mögen: a_1, b_1, und a_2, b_2 (sprich: a Nummer Eins oder a mit dem Index oder Zeiger Eins oder a tief Eins oder schlechthin a Eins u. s. f.), so sind nur folgende Zusammenstellungen möglich: $a_1 a_2$, $a_1 b_2$, $b_1 a_2$, $b_1 b_2$. Aus zwei Reihen von 3 Elementen erhält man die Wiederholungsvariationen: $a_1 a_2$, $a_1 b_2$, $a_1 c_2$, $b_1 a_2$, $b_1 b_2$, $b_1 c_2$, $c_1 a_2$, $c_1 b_2$, $c_1 c_2$. Aus drei Reihen von 2 Elementen ergeben sich die Gruppen: $a_1 a_2 a_3$, $a_1 a_2 b_3$, $a_1 b_2 a_3$, $a_1 b_2 b_3$, $b_1 a_2 a_3$, $b_1 a_2 b_3$, $b_1 b_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$. Aus drei Reihen von 3 Elementen erhält man: $a_1 a_2 a_3$, $a_1 a_2 b_3$, $a_1 a_2 c_3$, $a_1 b_2 a_3$, $a_1 b_2 b_3$, $a_1 b_2 c_3$, $a_1 c_2 a_3$, $a_1 c_2 b_3$, $a_1 c_2 c_3$, $b_1 a_2 a_3$, $b_1 a_2 b_3$, $b_1 a_2 c_3$, $b_1 b_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$,

$b_1\ b_2\ c_3$, $b_1\ c_2\ a_3$, $b_1\ c_2\ b_3$, $b_1\ c_2\ c_3$, $c_1\ a_2\ a_3$, $c_1\ a_2\ b_3$, $c_1\ a_2\ c_3$, $c_1\ b_2\ a_3$, $c_1\ b_2\ b_3$, $c_1\ b_2\ c_3$, $c_1\ c_2\ a_3$, $c_1\ c_2\ b_3$, $c_1\ c_2\ c_3$.

3. Die Anzahl der Wiederholungsvariationen 2ter Klasse aus 2 Elementen ist sonach $= 2 . 2 = 2^2$, die der Variationen 2ter Klasse aus 3 Elementen $= 3 . 3 = 3^2$, die der Variationen dritter Klasse aus 2 Elementen $= 2 . 2 . 2 = 2^3$, die der Variationen dritter Klasse aus 3 Elementen $= 3 . 3 . 3 = 3^3$. Allgemein ist, wenn man die Anzahl der Wiederholungsvariationen nter Klasse aus m Elementen durch m V R n andeutet, $m\ V\ R\ n = m^n$.

4. Das in N. 2 mit Hülfe der Nummern oder Zeiger genügend angedeutete Verfahren bei der Bildung der Wiederholungsvariationen läßt sich auch durch folgende Regel ausdrücken. Man ordne die Elemente gut, stelle das niedrigste so oft wiederholt als die Klassennummer angiebt zur ersten Variation zusammen, gehe dann hier und bei jeder folgenden von rechts nach links bis man an ein Element kommt, das noch nicht das höchste ist, ersetze dies durch das nächsthöhere, lasse links alle Elemente ungeändert und fülle die Stellen zur Rechten mit dem niedrigsten Elemente aus; so ergiebt sich endlich eine Variation, die nur das höchste Element enthält, und damit ist die Darstellung beendigt.

§ 121.

1. Wenn bei diesen Wiederholungsvariationen die verschiedne Anordnung der Elemente nicht berücksichtigt wird, sondern alle Gruppen, welche die nämlichen Elemente enthalten, als eine und dieselbe Gruppe betrachtet werden, so verringert sich die Anzahl der Zusammenstellungen und die übrig bleibenden machen die sogenannten Kombinationen mit Wiederholungen oder Wiederholungskombinationen aus, im Gegensatze zu welchen die in § 118 besprochnen Zusammenstellungen Kombinationen ohne Wiederholungen genannt werden. Auch hier unterscheidet man nach der Anzahl der in jeder Gruppe enthaltenen Elemente Kombinationen zweiter, dritter Klasse u. s. f.

2. So z. B. zerfallen, wenn man alle Gruppen, welche die nämlichen Elemente enthalten, in eine Abtheilung bringt, die Wiederholungsvariationen 2ter Klasse von 2 Elementen in 3 Abtheilungen: 1) a a, 2) a b, b a, 3) b b; ebenso die Wiederholungsvariationen 2ter Klasse von 3 Elementen in 6 Abtheilungen: 1) a a, 2) a b, b a, 3) a c, c a, 4) b b, 5) b c, c b, 6) c c; die Variationen dritter Klasse von 2 Elementen in 4 Abtheilungen: 1) a a a, 2) a a b, a b a, b a a, 3) a b b, b a b, b b a, 4) b b b; die Variationen dritter Klasse von 3 Elementen in 10 Abtheilungen: 1) a a a, 2) a a b, a b a, b a a, 3) a a c, a c a, c a a, 4) a b b, b a b, b b a, 5) a b c, a c b, b a c, b c a, c a b, c b a, 6) a c c, c a c, c c a, 7) b b b, 8) b b c, b c b, c b b, 9) b c c, c b c, c c b, 10) c c c (vgl. § 120, 2). Indem man nun bei jeder Abtheilung, die mehr als eine Gruppe enthält, die gutgeordnete Gruppe als Vertreterinn aller herausnimmt, ergeben sich als Kombinationen mit Wiederholungen von 2 Elementen zur 2ten Klasse a a, a b, b a; als Wiederholungskombinationen von 3 Elementen zu 2: a a, a b, a c,

bb, bc, cc; als solche Kombinationen von 2 Elementen zu 3: aaa, aab, abb, bbb; als Kombinationen der dritten Klasse von 3 Elementen: aaa, aab, aac, abb, abc, acc, bbb, bbc, bcc, ccc. Umgekehrt erhält man aus den Wiederholungskombinationen die Variationen wieder, wenn man die in jeder von den ersteren zusammengestellten Elemente permutirt (vgl. namentlich auch § 119).

3. Läßt man bei den Wiederholungskombinationen 2ter Klasse von 2 Elementen: aa, ab, bb das erste Element ungeändert, ersetzt aber das zweite durch den nächsten Buchstaben des Alphabets, so erhält man: ab, ac, bc, d. h. (118, 2) die Kombinationen ohne Wiederholungen zu 2 aus 3 = 2 + (2—1) Elementen. Verfährt man ebenso mit den Wiederholungskombinationen 2ter Klasse aus 3 Elementen: aa, ab, ac, bb, bc, cc, so erhält man: ab, ac, ad, bc, bd, cd, d. h. die Kombinationen ohne Wiederholungen zu 2 aus 4 = 3 + (2—1) Elementen. Wenn ferner bei den Wiederholungskombinationen zu 3 aus 2 Elementen: aaa, aab, abb, bbb das erste Element ungeändert bleibt, das zweite durch den nächstfolgenden, das dritte durch den zweitfolgenden Buchstaben des Alphabets ersetzt wird, so erhält man: abc, abd, acd, bcd, d. h. die Kombinationen ohne Wiederholungen zu 3 aus 4 = 2 + (3—1) Elementen. Behandelt man die Wiederholungskombinationen zu 3 aus 3 Elementen: aaa, aab, aac, abb, abc, acc, bbb, bbc, bcc, ccc ebenso, so erhält man: abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde, d. h. die Kombinationen ohne Wiederholungen zu 3 aus 5 = 3 + (3—1) Elementen. Allgemein ergeben sich, wenn man in den Wiederholungskombinationen nter Klasse aus m Buchstabenelementen das erste Element ungeändert läßt, das zweite durch den nächstfolgenden, das dritte durch den zweitfolgenden Buchstaben u. s. f. ersetzt oder bei Zahlenelementen das erste um 0, das zweite um 1, das dritte um 2 u. s. f. vermehrt (z. B. 111, 112, 122, 222 in 123, 124, 134, 234 verwandelt), die Kombinationen ohne Wiederholungen nter Klasse aus m + (n — 1) Elementen. Die Anzahl dieser letzteren Kombinationen ist aber, wenn man m + (n — 1) = p setzt, $= \frac{p \,.\, (p-1) \,.\, (p-2) \times \ldots \times (p-(n-1))}{n!}$, oder, (da p — (n — 1) = (m + (n — 1)) — (n — 1) = m,) wenn man die Faktoren des Dividenden in umgekehrter Ordnung auf einander folgen läßt, $= \frac{m \,.\, (m+1) \,.\, (m+2) \times \ldots \times (m+(n-1))}{n!}$.

Wenn daher die Anzahl der Wiederholungskombinationen nter Klasse aus m Elementen durch m C R n angedeutet wird, so muß auch m C R n = $\frac{m \,.\, (m+1) \,.\, (m+2) \times \ldots \times (m+(n-1))}{n!}$ sein; oder man erhält m C R n, wenn man in dem Produkte von n gleichen Faktoren m, welches nach § 120, 3 = m V R n ist, den ersten Faktor um 0, den 2ten um 1, den dritten um 2 u. s. f. und allgemein den nten um n — 1 vermehrt und das Produkt dieser vermehrten Faktoren durch n P dividirt.

4. Ohne vorerst die Wiederholungsvariationen zu bilden u. s. w. kann man die Wiederholungskombinationen darstellen indem man das niedrigste Element, so oft wiederholt als die Klassennummer angiebt, zur ersten Kombination zusammenstellt, dann hier und bei jeder folgenden von rechts nach links gehend das erste Element, welches noch nicht das höchste ist, durch das nächsthöhere ersetzt und (während die Elemente zur Linken ungeändert bleiben) die Stellen zur Rechten ebenfalls mit diesem nächsthöheren Elemente ausfüllt; so ergiebt sich endlich eine Kombination, welche nur das höchste Element enthält, und damit ist die Bildung der Kombinationen beendigt.

Zweites Kapitel. Der binomische Lehrsatz.

§ 122.

1. Eine Summe, von deren Summanden jeder in einem beliebigen (also auch negativen, gebrochnen, irrationalen, imaginären) Zahlenausdrucke bestehn kann, nennt man im Allgemeinen ein Polynom und nach der Anzahl der Summanden oder Glieder, wenn deren zwei, drei u. s. f. sind, ein Binom, Trinom u. s. f.; auch beschränkt man wohl den Namen Polynom auf diejenigen Polynome, welche mehr als zwei Glieder enthalten.

2. Die mte Potenz eines Binoms $1 + x$ läßt sich in jedem Falle, m mag positiv oder negativ, ganz oder gebrochen sein, als ein Polynom von unendlich vielen Gliedern darstellen, wovon jedes eine Potenz von x, so daß die Exponenten stufenweise zunehmend 0, 1, 2 u. s. f. sind, und außerdem vom zweiten Gliede an einen gewissen Koefficienten enthält. Diese Binomialkoefficienten werden gebildet indem man von m die Zahlen 0, 1, 2 u. s. f. abzieht und die erste von diesen Differenzen mit 1, das Produkt der zwei ersten mit $1 \,.\, 2 = 2!$, das Produkt der 3 ersten mit $1 \,.\, 2 \,.\, 3 = 3!$ u. s. f. dividirt. Demnach ist der erste, dem zweiten Gliede des Polynoms angehörende oder der Potenz x^1 beizugebende Koefficient $= \frac{m - 0}{1} = \frac{m}{1} = m$, der zweite, zu x^2 gehörige $= \frac{m \,.\, (m-1)}{2!}$, der dritte, zu x^3 zu setzende $= \frac{m \,.\, (m-1) \,.\, (m-2)}{3!}$ u. s. f., allgemein der nte, womit x^n zu multipliciren ist, $= \frac{m \,.\, (m-1) \,.\, (m-2) \times \ldots\ldots \times (m-(n-1))}{n!}$.
Oder man kann auch sagen, der erste sei $= m$, der zweite $= m \,.\, \frac{m-1}{2}$, der dritte $= m \,.\, \frac{m-1}{2} \,.\, \frac{m-2}{3}$, der nte $= m \,.\, \frac{m-1}{2} \,.$

$\frac{m-2}{3} \times \ldots \times \frac{m-(n-1)}{n}$. Um diese Koefficienten kurz zu bezeichnen, setzt man für den ersten $\binom{m}{1}$ oder m_1, für den zweiten $\binom{m}{2}$ oder m_2, allgemein für den nten $\binom{m}{n}$ oder m_n.

3. Nach N. 2 muß aus dem nten Binomialkoefficienten der (n + 1)te durch Multiplikation mit $\frac{m-n}{n+1}$ sich ergeben.

4. Ferner muß allgemein $m_{n-1} + m_n = (m+1)_n$ sein. Denn m_n ist nach N. 2 und 3 $= m_{n-1} \times \frac{m-(n-1)}{n}$, also ist $m_{n-1} + m_n = m_{n-1} \times \left(1 + \frac{m-(n-1)}{n}\right) = m_{n-1} \times \frac{m+1}{n}$; nun ist $m_{n-1} = \frac{m \times \ldots \times (m-(n-2))}{(n-1)!}$, folglich $m_{n-1} \times \frac{m+1}{n} = \frac{(m+1) \,.\, m \times \ldots \times (m-(n-2))}{(n-1)!\, n} = \frac{(m+1) \times \ldots \times ((m+1)-(n-1))}{n!} = (m+1)_n$.

5. Ist m eine positive ganze Zahl, so ist $m_m = \frac{m \times \ldots \times (m-(m-1))}{m!} = \frac{m \times \ldots \times 1}{m!} = \frac{m!}{m!} = 1$; ferner (N. 3) $m_{m+1} = m_m \times \frac{m-m}{m+1} = 1 \times \frac{0}{m+1} = 1 \times 0 = 0$, und da auch bei allen folgenden Koefficienten der Faktor $m - m = 0$ im Dividenden wiederkehrt, so sind auch diese $= 0$. Es giebt also in diesem Falle nur m Koefficienten, die wirklichen Werth haben d. h. nicht = 0 sind, somit auch die Glieder, denen sie angehören, nicht werthlos d. h. = 0 machen.

§ 123.

1. Daß nun der in § 122, 2 aufgestellte binomische Lehrsatz oder Binomialsatz zunächst für jede positive ganze Zahl m richtig ist, ergiebt sich so. Nach § 61, 1 ist $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$. Nach § 122, 2 soll $(1+x)^2 = x^0 + 2_1 x^1 + 2_2 x^2 + 2_3 x^3 + 2_4 x^4 + \ldots$ sein. Es ist aber $x^0 = 1$, $2_1 = 2$ und $2_1 x^1 = 2x$, $2_2 = \frac{2.(2-1)}{2!} = 1$ und $2_2 x^2 = x^2$, $2_3 = \frac{2.(2-1).(2-2)}{3!} = 0$ und $2_3 x^3 = 0$, ebenso 2_4 und $2_4 x^4 = 0$ u. s. f. (§ 122, 5); also gilt der Satz für m = 2. Könnte nun gezeigt werden, daß er, wenn er für irgend einen Exponenten p gilt, auch für p + 1 gelten müsse, so wäre seine Gültigkeit auch für m = 3, m = 4 u. s. f. erwiesen. Angenommen nun, es sei $(1+x)^p = x^0 + p_1 x^1 + p_2 x^2 +$

$p_3 x^3 + p_4 x^4 + \ldots$, so muß $(1 + x)^{p+1} = (x^0 + p_1 x^1 + p_2 x^2 + \ldots) \times (1 + x)$ oder $= x^0 + p_1 x^1 + p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4 + \ldots$
$+ \quad x^1 + p_1 x^2 + p_2 x^3 + p_3 x^4 + p_4 x^5 + \ldots$
sein. Es ist aber (§ 122, 4) $p_1 + p_2 = (p + 1)_2$, $p_2 + p_3 = (p + 1)_3$, $p_3 + p_4 = (p + 1)_4$ u. s. f.; folglich ist, wenn man die über einander stehenden Glieder, welche dieselbe Potenz von x enthalten, in ein Glied zusammenzieht, $(1 + x)^{p+1} = x^0 + (p + 1)_1 x^1 + (p + 1)_2 x^2 + (p + 1)_3 x^3 + (p + 1)_4 x^4 + \ldots$ und der Satz ist somit, wenn für $(1 + x)^p$, auch für $(1 + x)^{p+1}$ gültig.

2. Wären zwei solche Polynome $A = x^0 + m_1 x^1 + m_2 x^2 + \ldots$ und $B = x^0 + n_1 x^1 + n_2 x^2 + \ldots$ mit einander zu multipliciren, so müßte das Produkt in jedem Falle wieder ein solches Polynom und zwar $= x^0 + (m + n)_1 x^1 + (m + n)_2 x^2 + \ldots$ sein. Für den Fall, daß m und n positive ganze Zahlen sind, kann dies nach N. 1 keinem Zweifel mehr unterliegen, da in diesem Falle $A = (1 + x)^m$, $B = (1 + x)^n$, $AB = (1 + x)^{m+n}$ und $m + n$ wieder eine positive ganze Zahl ist. Aber die Gesetze der Multiplikation sind und bleiben dieselben, was auch m und n sein mögen; die einzelnen Produkte, welche sich bei der Multiplikation von $x^0 + m_1 x^1 + m_2 x^2 + \ldots$ mit $x^0 + n_1 x^1 + n_2 x^2 + \ldots$ ergeben, müssen also immer dieselbe Form behalten und wenn man von diesen einzelnen Produkten diejenigen, welche die nämliche Potenz von x enthalten, zu einem Gliede zusammenfaßt, so müssen auch diese Produktensummen der Form nach stets dieselben bleiben, also muß überhaupt das Produkt der beiden Polynome immer die Form $x^0 + (m + n)_1 x^1 + (m + n)_2 x^2 + \ldots$ haben, wenn es für zwei positive ganze Zahlen m und n diese Form hat.

3. Ist nun m eine negative ganze Zahl und zwar $= - n$, somit n eine positive ganze Zahl, so werden im Produkte der beiden Polynome alle Koefficienten $= 0$, da alle im Dividenden den Faktor $m + n = (- n) + n = 0$ enthalten; mithin ist das ganze Produkt dem Werthe nach $= x^0 = 1$ und $A = \frac{1}{B}$. Da nun B jedenfalls (weil n eine positive ganze Zahl) $= (1 + x)^n$, so ist $A = \frac{1}{(1 + x)^n} = (1 + x)^{-n} = (1 + x)^m$. Also gilt der Binomialsatz auch für negative ganze Exponenten.

4. Ist $C = x^0 + m_1 x^1 + m_2 x^2 + \ldots$, so muß nach N. 2 in jedem Falle $C \times C = C^2 = x^0 + (m + m)_1 x^1 + (m + m)_2 x^2 + \ldots = x^0 + (2m)_1 x^1 + (2m)_2 x^2 + \ldots$ sein; ebenso $C^2 \times C = C^3 = x^0 + (3m)_1 x^1 + (3m)_2 x^2 + \ldots$, allgemein (wenn q eine eigentliche Zahl) $C^q = x^0 + (qm)_1 x^1 + (qm)_2 x^2 + \ldots$ Ist nun m ein Bruch $= \frac{p}{q}$, so ist $C^q = x^0 + \left(q \frac{p}{q}\right)_1 x^1 + \left(q \frac{p}{q}\right)_2 x^2 + \ldots = x^0 + p_1 x^1 + p_2 x^2 + \ldots = (1 + x)^p$, da p eine ganze Zahl (die positiv oder negativ sein kann). Radicirt man beiderseits mit q, so ist $C = (1 + x)^{p:q}$; also gilt der Binomialsatz auch für

einen gebrochnen (positiven oder negativen) Exponenten ($m = \frac{p}{q}$ oder $= -\frac{p}{q} = \frac{-p}{q}$).

§ 124.

1. Für ein positives ganzes m sind die Binomialkoefficienten m_1 bis m_m eins mit $mC1$ bis mCm (vgl. § 118, 2). Hienach ergiebt sich also auch $mCn + 1$ aus mCn durch Multiplikation mit $\frac{m - n}{n + 1}$ (§ 122, 3) und es ist $mCn - 1 + mCn = m + 1Cn$ (§ 122, 4).

2. Für ein positives ganzes m ist $m_1 = m_{m-1}$, $m_2 = m_{m-2}$, allgemein $m_n = m_{m-n}$ (wobei n als positiv und ganz und $< m$ angenommen ist). Denn es ist $m_n = \frac{m \times \ldots \times (m - (n - 1))}{n!}$ und $m_{m-n} = \frac{m \times \ldots \times (m - ((m - n) - 1))}{(m - n)!}$, mithin $m_n = \frac{m \times \ldots \times (m - (n - 1)) \times (m - n)!}{n!\,(m - n)!} = \frac{m!}{n!\,(m - n)!}$ und $m_{m-n} = \frac{m \times \ldots \times (n + 1) \times n!}{(m - n)!\,n!} = \frac{m!}{(m - n)!\,n!}$. Der Koefficient $m_m = 1$ (§ 122, 5) steht allein.

3. Aus 1 und 2 folgt, daß auch $mCn = mCm - n$.

4. Ist m eine gerade Zahl $= 2r$, so ist $m - r = r$ d. h. es giebt hier außer m_m noch einen unpaaren Koefficienten, nämlich m_r, während m_1 und m_{m-1}, m_2 und m_{m-2} u. s. f. bis m_{r-1} und m_{r+1} ($= m_{m-(r-1)} = m_{2r-(r-1)}$) $\frac{m-2}{2} = \frac{2r-2}{2} = r - 1$ Paare gleicher Koefficienten darstellen.

5. Setzt man $x = 1$, so werden alle Potenzen von x auch $= 1$ und jedes Glied vom 2ten an wird dem bloßen Binomialkoefficienten gleich. Für ein positives ganzes m ergiebt sich dann $(1 + x)^m = (1 + 1)^m = 1^0 + m_1 + m_2 + \ldots + m_m$, oder es ist $2^m - 1 = m_1 + m_2 + \ldots + m_m$, somit auch $= mC1 + mC2 + \ldots + mCm$.

6. Für einen negativen ganzen Exponenten $m = -n$ wird $m_1 = -n = (-1)n$, $m_2 = \frac{(-n) . (-n - 1)}{2!} = \frac{(-n) . (-(n + 1))}{2!} = \frac{(-1)^2 . n . (n + 1)}{2!}$, $m_3 = \frac{(-n) . (-n - 1) . (-n - 2)}{3!} = \frac{(-1)^3 . n . (n + 1) . (n + 2)}{3!}$, allgemein $m_p =$

$\frac{(-1)^p \,.\, n \times \ldots \times (n + (p-1))}{p!}$, also, wenn p gerade, $= \frac{n \times \ldots \times (n + (p-1))}{p!}$ und, wenn p ungerade, $= -\frac{n \times \ldots \times (n + (p-1))}{p!}$ (vgl. § 60, 4). Von diesen Koefficienten wird natürlich (da der Faktor 0 nicht vorkommen kann) keiner = 0, mithin wird auch kein Glied des Polynoms = 0. Uebrigens ist, abgesehen vom Vorzeichen, m_p oder $(-n)_p = n\mathrm{CRp}$ (§ 121, 3).

7. Für einen gebrochnen Exponenten $m = \frac{p}{q}$ wird $m_1 = \frac{p}{q} : 1 = \frac{p}{q}$, $m_2 = \left(\frac{p}{q} \,.\, \left(\frac{p}{q} - 1\right)\right) : 2! = \left(\frac{p}{q} \,.\, \frac{p-q}{q}\right) : 2! = \frac{p \,.\, (p-q)}{2!\, q^2}$ oder auch $= \frac{p}{q} \,.\, \frac{p-q}{2q}$, $m_3 = \left(\frac{p}{q} \,.\, \left(\frac{p}{q} - 1\right) . \left(\frac{p}{q} - 2\right)\right) : 3! = \left(\frac{p}{q} \,.\, \frac{p-q}{q} \,.\, \frac{p-2q}{q}\right) : 3! = \frac{p \,.\, (p-q) \,.\, (p-2q)}{3!\, q^3}$ oder auch $= \frac{p}{q} \,.\, \frac{p-q}{2q} \,.\, \frac{p-2q}{3q}$, allgemein $m_r = \frac{p \,.\, (p-q) \,.\, (p-2q) \times \ldots \times (p-(r-1)q)}{r!\, q^r}$ oder auch $= \frac{p}{q} \,.\, \frac{p-q}{2q} \,.\, \frac{p-2q}{3q} \times \ldots \times \frac{p-(r-1)q}{rq}$.

Da p keinenfalls, der Bruch mag ein echter oder ein unechter sein, durch q theilbar ist, so kann auch kein Vielfaches von q den Werth p erhalten d. h. es kann keine der Differenzen $p - q$, $p - 2q$ u. s. f., somit auch kein Koefficient und kein Glied des Polynoms = 0 werden. Ebenso wenig ist dies bei $m = -\frac{p}{q} = \frac{-p}{q}$ möglich, wo $m_r = \frac{(-1)^r \,.\, p \,.\, (p+q) \,.\, (p+2q) \times \ldots \times (p+(r-1)q)}{r!\, q^r}$ oder $= (-1)^r \,.\, \frac{p}{q} \,.\, \frac{p+q}{2q} \,.\, \frac{p+2q}{3q} \times \ldots \times \frac{p+(r-1)q}{rq}$ wird (vgl. Nr. 6).

§ 125.

1. Ist x negativ, so ist $(-x)^{2n} = x^{2n}$, $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$ (§ 60, 2 . 3); demnach wird $(1-x)^m = x^0 - m_1 x^1 + m_2 x^2 - m_3 x^3 + \ldots$

2. Da $a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$, so ist $(a+b)^m =$

$a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$; setzt man nun $\frac{b}{a}$ an die Stelle von x, so ergiebt sich $\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = \frac{b^0}{a^0} + m_1\frac{b^1}{a^1} + m_2\frac{b^2}{a^2} + m_3\frac{b^3}{a^3} + \ldots$ und, indem man mit a^m multiplicirt, $(a+b)^m = a^m + m_1 a^{m-1} b^1 + m_2 a^{m-2} b^2 + m_3 a^{m-3} b^3 + \ldots$

§ 126.

1. Für ein positives ganzes n ist die nte Potenz eines Polynoms von m Gliedern gleich der Summe der aus diesen Gliedern als Elementen gebildeten Wiederholungskombinationen zu n, wenn man diese Kombinationen als Produkte betrachtet und jeder von ihnen die Permutationszahl der in ihr enthaltenen Elemente als Koefficienten beigiebt. Denn es ist z. B. $(a+b+c)^2 = aa + ab + ac + ba + bb + bc + ca + cb + cc = aa + 2ab + 2ac + bb + 2bc + cc = \frac{2!}{2!}aa + 2!\,ab + 2!\,ac + \frac{2!}{2!}bb + 2!\,bc + \frac{2!}{2!}cc$, und ganz ähnlich verhält es sich in jedem andren Falle.

2. Demnach wird (vgl. 121, 3) bei m Gliedern der für die nte Potenz des Polynoms sich ergebende polynomische Ausdruck $\frac{m \times \ldots \times (m+(n-1))}{n!}$ oder $\frac{(m-1)!\,m \times \ldots \times (m+(n-1))}{(m-1)!\,n!} = \frac{(m+(n-1))!}{(m-1)!\,n!}$ Glieder enthalten; in jedem derselben wird entweder nur ein Glied des gegebenen Polynoms, aber zur nten Potenz erhoben, vorkommen, oder es werden darin 2 bis n verschiedne Glieder des gegebenen Polynoms enthalten und mit Potenzexponenten behaftet sein, deren Summe = n ist; zu diesen Potenzen und Potenzprodukten wird außerdem in jedem Gliede ein Koefficient treten, der für alle Glieder, in denen die nämlichen Potenzexponenten vorkommen, der nämliche ist, wie auch die Exponenten unter die Faktoren vertheilt sein mögen, da z. B. die Permutationszahl für $a^3 b^2 c$ dieselbe wie für $a^2 b^3 c$, $a^2 b c^3$, $a^3 b c^2$, $a b^3 c^2$, $a b^2 c^3$ nämlich $= \frac{6!}{2!\,3!}$, ist. Für diejenigen Glieder der Potenz, welche nur ein mit n potenzirtes Glied des gegebenen Polynoms enthalten, ist er nach § 119 nothwendig = 1.

3. Die Summe aller dieser Polynomialkoefficienten muß $= m^n$ sein, da, wenn man jede Wiederholungskombination so oft nimmt als ihre Elemente permutirt werden können, im Ganzen die Zahl der Wiederholungsvariationen sich ergeben muß (vgl. § 121, 3).

Drittes Kapitel. Zur Lehre von der Division.

§ 127.

1. Ist ein Polynom als Divisor gegeben, so ist der Dividend entweder ein wirkliches Produkt des Divisors und eines andern Ausdruckes, der entweder ebenfalls ein Polynom sein kann oder nicht; oder der Dividend ist kein solches Produkt. Im ersten Hauptfalle ist der Dividend nothwendig auch ein Polynom; im zweiten kann er entweder ein Polynom sein oder nicht. Im ersten Hauptfalle muß sich aus dem Dividenden und Divisor der Quotient vollständig berechnen lassen, ohne daß ein Rest der Division bleibt; im zweiten aber kann die Division nie aufgehn, und man erhält als Quotienten ein Polynom von unendlich vielen Gliedern.

2. Das Verfahren zur Ermittlung des Quotienten ist übrigens für alle diese Fälle im Wesentlichen dasselbe und gleicht der numerischen Division mit einer mehrziffrigen Zahl (§ 90, 2). Ist nämlich auch der Dividend ein Polynom, so sucht man zuerst ihn und den Divisor nach den Buchstaben und zwar, wo es angeht, nach steigenden oder fallenden Potenzen (§ 63, 1) möglichst übereinstimmend zu ordnen; sind Dividend und Divisor schon so geordnet, oder zeigen sie keine Aehnlichkeit, oder ist der Dividend kein Polynom, so fällt diese Vorbereitung weg. Alsdann sucht man einen Ausdruck, der mit dem ersten Gliede des Divisors multiplicirt das erste Glied des Dividenden oder den ganzen Dividenden, wenn dieser kein Polynom ist, giebt; mit diesem Ausdrucke multiplicirt man den ganzen Divisor und zieht das Produkt vom Dividenden ab; bleibt kein Rest, so ist der gefundne Ausdruck der gesuchte Quotient; widrigenfalls ist er nur das erste Glied desselben, und man hat nun abermals mit dem ersten Gliede des Divisors das erste Glied des Restes oder nach Umständen den ganzen Rest zu dividiren u. s. f. So z. B. ergiebt sich für den Quotienten $\frac{2a^2d - a^2e^3 + 6bd - 3be^3 - 2c^4d + c^4e^3}{a^2 + 3b - c^4}$ folgendermaßen der Ausdruck $2d - e^3$:

$$\begin{array}{l|llllll|l}
a^2 + 3b - c^4 & 2a^2d & - a^2e^3 & + 6bd & - 3be^3 & - 2c^4d & + c^4e^3 & 2d - e^3 \\
 & 2a^2d & & + 6bd & & - 2c^4d & & \\
\hline
 & & - a^2e^3 & & - 3be^3 & & + c^4e^3 & \\
 & & - a^2e^3 & & - 3be^3 & & + c^4e^3 & \\
\hline
 & & & & 0 & & &
\end{array}$$

Dagegen erhält man für $\frac{3a - d^2 + 2e^3}{a^2 + 3b - c^4}$ ein Polynom von unendlich vielen Gliedern $\frac{3}{a} - \frac{3\,(3b - c^4)}{a^3} + \ldots$; es ergiebt sich nämlich:

$$a^2 + 3b - c^4 \;\Big|\; 3a - d^2 + 2e^3 \;\Big|\; \frac{3}{a} - \frac{3(3b - c^4)}{a^3} + \frac{3(3b - c^4)^2}{a^5}$$

$$3a + \frac{3(3b - c^4)}{a}$$

$$- \frac{3(3b - c^4)}{a} - d^2 + 2e^3$$

$$- \frac{3(3b - c^4)}{a} - \frac{3(3b - c^4)^2}{a^3}$$

$$+ \frac{3(3b - c^4)^2}{a^3} - d^2 + 2e^3$$

$$+ \frac{3(3b - c^4)^2}{a^3} + \frac{3(3b - c^4)^3}{a^5}$$

u. s. f.

Aehnlich ist $\frac{c}{a + b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \ldots\ldots$; denn man findet:

$$a + b \;\Big|\; c \;\Big|\; \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3}$$

$$c + \frac{bc}{a}$$

$$- \frac{bc}{a}$$

$$- \frac{bc}{a} - \frac{b^2c}{a^2}$$

$$+ \frac{b^2c}{a^2}$$

$$+ \frac{b^2c}{a^2} + \frac{b^3c}{a^3}$$

u. s. f.

§ 128.

1. Auch bei Polynomen kann, wie bei Zahlen, die in Ziffern ausgedrückt sind, nach den letzten Theilern, nach dem kleinsten Gemeinvielfachen, nach dem größten Gemeintheiler u. s. w. gefragt werden. Besondre Regeln zur Zerlegung von Polynomen in ihre Faktoren, ähnlich den in § 97—99 aufgestellten Regeln, lassen sich nicht wohl geben; es kommt hiebei hauptsächlich auf achtsame Vergleichung der Glieder und Uebung an; indessen enthalten § 61 und 62, dann das vorige Kapitel einige bestimmtere Andeutungen für gewisse Fälle. Die Aufsuchung des größten Gemeintheilers geschieht ganz nach § 94, 5 und 6, und das in § 94, 6 Gesagte gilt vorzüglich auch für Polynome. Es kann aber hier auch der Fall eintreten, daß man den Dividenden mit einem passenden Faktor zu multipliciren (statt mit einem seiner Faktoren zu dividiren) hat, damit sein erstes Glied durch das erste Glied des Divisors theilbar werde. Durch eine solche Multiplikation wird, soferne der

hinzutretende Faktor kein Faktor des Divisors ist, der größte Gemeintheiler nicht geändert; denn sind A und B zwei theilerverwandte Zahlen oder Polynome und ist m kein Faktor von B, so muß der größte Gemeintheiler von m A und B derselbe sein wie von A und B, da m als nichtgemeinschaftlicher Faktor kein Faktor irgend eines Gemeintheilers von m A und B sein kann. So z. B. um den größten Gemeintheiler von $5x^3 - 18x^2y + 11xy^2 - 6y^3$ und $7x^2 - 23xy + 6y^2$ zu finden, multiplicire man das erste Polynom mit 7, wodurch sich der Dividend $35x^3 - 126x^2y + 77xy^2 - 42y^3$, der Quotient $5x$ und der Rest $-11x^2y + 47xy^2 - 42y^3$ ergiebt; letzterer enthält den Faktor y, der kein Faktor von $7x^2 - 23xy + 6y^2$ ist und den man also weglassen kann; dividirt man nun mit $-11x^2 + 47xy - 42y^2$ den mit 11 multiplicirten vorigen Divisor $7x^2 - 23xy + 6y^2$, so erhält man den Rest $76xy - 228y^2$; den in $-11x^2 + 47xy - 42y^2$ nicht enthaltenen Faktor $76y$ dieses Restes weglassend und bloß mit $x - 3y$ dividirend erhält man den Rest $14xy - 42y^2$, worin der in $x - 3y$ nicht vorkommende Faktor $14y$ enthalten ist; diesen weglassend und $x - 3y$ durch $x - 3y$ dividirend erhält man den Quotienten 1 und den Rest 0; also ist $x - 3y$ der gesuchte größte Gemeintheiler.

2. Hat man eine Zahl in ihre letzten oder einfachen Theiler zerlegt, so kann die weitere Aufgabe gestellt werden: alle zusammengesetzten Theiler zu finden. Zu dem Ende werden die letzten Theiler als Kombinationselemente gut geordnet und aus ihnen, wenn m ihre Anzahl ist, Kombinationen zu 2, 3 . . . bis m gebildet; kommt ein und derselbe letzte Theiler mehrmals vor, wodurch sich im Verfolge des Verfahrens Kombinationen ergeben müssen, die schon dagewesen sind, so kann man diese sofort weglassen.

3. Wenn eine Zahl den letzten Theiler a bmal, den letzten Theiler c dmal, den letzten Theiler e fmal u. s. f. enthält, also $= a^b \,.\, c^d \,.\, e^f \ldots$ ist, so ist die Anzahl ihrer einfachen Theiler, insofern diese von einander verschieden sind, und ihrer zusammengesetzten Theiler $= (b + 1)(d + 1)(f + 1) \ldots - 2$. Denn es ist die Zahl durch alle Potenzen von a bis einschließlich a^b, ebenso durch alle Potenzen von c bis einschließlich c^d, durch alle Potenzen von e bis einschließlich e^f u. s. f. theilbar, und es werden sich hienach alle einfachen und zusammengesetzten Theiler ergeben müssen, wenn man mit jedem Gliede der Reihe $1, a^1, a^2 \ldots a^b$ jedes Glied der Reihe $1, c^1, c^2 \ldots c^d$ zusammenstellt und multiplicirt, ferner mit diesen Produkten jedes Glied der Reihe $1, e^1, e^2 \ldots e^t$ u. s. f. (vgl. § 120, 1); nun enthält aber die erste Reihe $b + 1$ Glieder, die zweite $d + 1$, die Anzahl der sich hieraus ergebenden Produkte muß also $= (b + 1) \times (d + 1)$ sein; multiplicirt man jedes dieser Produkte mit den $f + 1$ Gliedern der dritten Reihe, so erhält man $(b + 1)(d + 1)(f + 1)$ Produkte u. s. f., und rechnet man von der Anzahl aller dieser Produkte die Produkte $1 \,.\, 1 \,.\, 1 \ldots = 1$ und $a^b \,.\, c^d \,.\, e^f \ldots =$ der Zahl selbst ab, welche nur uneigentlicherweise Theiler der Zahl heißen können, so bleibt als Anzahl aller eigentlichen und dabei wirklich von

einander verschiednen Theiler $(b + 1)(d + 1)(f + 1) \ldots - 2$ übrig.

4. Jeder Gemeintheiler zweier oder mehrerer Differenzen theilt auch die Differenz zwischen dem Produkte der Minuenden und dem Produkte der Subtrahenden. Denn bezeichnet man die Minuenden mit m_1, m_2, $m_3 \ldots$, die Subtrahenden mit s_1, s_2, $s_3 \ldots$, die Differenzen mit d_1, d_2, $d_3 \ldots$, so ist $m_1 = s_1 + d_1$, $m_2 = s_2 + d_2$, $m_3 = s_3 + d_3 \ldots$, also $m_1 . m_2 . m_3 \ldots = (s_1 + d_1)(s_2 + d_2) \times (s_3 + d_3) \ldots$ Entwickelt man letzteres Produkt zu einer Produktensumme, so enthält jedes Glied derselben, ausgenommen das Produkt $s_1 . s_2 . s_3 \ldots$, wenigstens einen Faktor d_1 oder d_2 oder d_3 u. s. f.; also muß jedes solche Glied und mithin die ganze um $s_1 . s_2 . s_3 \ldots$ verminderte Produktensumme, folglich auch $(m_1 . m_2 . m_3 \ldots) - (s_1 . s_2 . s_3 \ldots)$ durch jeden Gemeintheiler von d_1 und d_2 und d_3 u. s. f. theilbar sein.

5. Ist der Exponent m, womit ein Binom potenzirt werden soll, eine Primzahl, so ist jeder Binomialkoefficient, außer $m_m = 1$, durch m theilbar. Denn aus $m_n = \frac{m . (m-1) . (m-2) \times \ldots \times (m-(n-1))}{n!}$ folgt $m_n \times n! = m . (m-1) . (m-2) \times \ldots \times (m-(n-1))$; da nun die rechte Seite dieser Gleichung durch m theilbar ist, so muß es auch die linke sein; aber n! kann nicht durch die Primzahl $m > n$ theilbar sein, somit muß m_n durch sie theilbar sein (§ 95, 1).

6. Auch wenn ein Polynom (im engeren Sinne) mit einer Primzahl m potenzirt werden soll, ist, wie sich auf ganz ähnliche Weise ergiebt, jeder Polynomialkoefficient durch m theilbar, außer jene Koefficienten, welche = 1 sind, (§ 126, 2).

§ 129.

1. Wenn zwei Zahlen a und b bei der Division mit einer dritten Zahl c (kürzer: wenn a und b nach c) denselben Rest lassen, so nennt man a und b gleichrestig nach c.

2. Wenn der eine Summand einer Summe durch eine gewisse Zahl theilbar ist, so ist nothwendig der andre Summand mit der Summe nach ebendieser Zahl gleichrestig.

3. Die Differenz zweier nach einer dritten Zahl gleichrestigen Zahlen ist durch diese dritte Zahl theilbar. Denn es sei $a = cd + e$, $b = cf + e$, so ist $a - b = c(d - f) + (e - e) = c(d - f)$. Da nun hier unter a, b, c, d, e, f lauter eigentliche Zahlen zu verstehn sind, so ist natürlich $d - f$ auch eine solche, mithin $a - b$ ein wirkliches Vielfaches von c.

4. Ein Produkt ist nach irgend einer Zahl nothwendig gleichrestig mit dem Produkte der Reste, welche die einzelnen Faktoren nach ebendieser Zahl lassen. Denn ist z. B. $a = cd + e$, $b = cf + g$, so ist $ab = c^2 df + cdg + cef + eg = c(cdf + dg + ef) + eg$; also muß (vgl. N. 2) ab mit eg nach c gleichrestig sein. Dasselbe gilt auch für mehr als zwei Faktoren.

5. Demnach ist jede Potenz nach irgend einer Zahl gleichrestig mit der gleichhohen Potenz des Restes, welchen die Grundzahl nach dieser Zahl läßt. Weil ferner $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, so muß a^{m+n} nach t gleichrestig sein mit dem Produkte der Reste, welche a^m und a^n nach t lassen; namentlich muß auch a^{p+1} nach t gleichrestig sein mit dem Produkte der Reste, welche a^p und $a^1 = a$ nach t lassen.

§ 130.

1. Ist p eine Primzahl und n irgend eine andre durch p nicht theilbare Zahl, so ist $n^{p-1} - 1$ durch p theilbar. (Fermat's Lehrsatz.)

Erster Beweis. Multiplicirt man n mit den Zahlen von 1 bis $p - 1$, so kann keines von diesen Vielfachen $1n, 2n, 3n, \ldots, (p-1)n$ durch p theilbar sein, da weder die Zahlen 1 bis $p - 1$ durch p theilbar sind, noch n durch p theilbar ist (§ 95, 1). Es kann aber auch keines von diesen Vielfachen mit einem andern nach p gleichrestig sein, weil sonst (§ 129, 3) die Differenz dieser beiden Vielfachen, die doch wieder nur ein solches Vielfaches sein würde, durch p theilbar sein müßte. Folglich müssen sich, wenn man alle diese Vielfachen mit p dividirt, lauter verschiedne Reste ergeben, und zwar $p - 1$ verschiedne Reste, also alle verschiednen Reste, die nach p überhaupt möglich sind, d. h. die Zahlen von 1 bis $p - 1$ (§ 92, 3). Also muß man aus den Vielfachen $1n, 2n, 3n, \ldots, (p-1)n$ als Minuenden und den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, p - 1$ als Subtrahenden, weil je eines von jenen Vielfachen mit einer von diesen Zahlen nach p gleichrestig ist (vgl. § 92, 1), $p - 1$ durch p theilbare Differenzen bilden können (§ 129, 3); mithin muß auch $1n \cdot 2n \cdot 3n \times \ldots \times (p-1)n - 1 \cdot 2 \cdot 3 \times \ldots \times (p-1)$ oder $(1 \cdot 2 \cdot 3 \times \ldots \times (p-1)) \cdot (n^{p-1} - 1)$ durch p theilbar sein (§ 128, 4). Da nun $1 \cdot 2 \cdot 3 \times \ldots \times (p-1)$ zu p theilerfremd ist, so muß $n^{p-1} - 1$ durch p theilbar sein (§ 95, 3).

Oder: da sich bei der Division der Vielfachen $1n, 2n, \ldots, (p-1)n$ mit p die Reste $1, 2, \ldots, p - 1$ ergeben, so muß (§ 129, 4) das Produkt $1n \cdot 2n \times \ldots \times (p-1)n$ nach p gleichrestig sein mit dem Produkte $1 \cdot 2 \times \ldots \times (p-1)$, mithin $1n \cdot 2n \times \ldots \times (p-1)n - 1 \cdot 2 \times \ldots \times (p-1)$ oder $(1 \cdot 2 \times \ldots \times (p-1)) \cdot (n^{p-1} - 1)$ durch p theilbar (§ 129, 3), u. s. w. wie oben.

Zweiter Beweis. Ist $a + b + c + \ldots$ ein Polynom von n Gliedern und entwickelt man nach § 126 dessen pte Potenz, so sind, abgesehen von den Gliedern $a^p, b^p, c^p, \ldots$, die Koefficienten aller übrigen Glieder des Entwicklungsausdruckes durch p theilbar (§ 128, 6); mithin muß auch (§ 94, 1 und 2) die Summe dieser letzteren Koefficienten durch p theilbar sein. Es ist aber (§ 126, 3) die Summe aller Koefficienten $= n^p$ und (§ 126, 2) die Summe der Koefficienten der Glieder $a^p, b^p, c^p, \ldots = n$; mithin muß $n^p - n = (n^{p-1} - 1) \cdot n$ durch p theilbar sein; ist nun n nicht durch p theilbar, so muß es $n^{p-1} - 1$ sein (§ 95, 1).

2. Alle Primzahlen außer der Zahl 2 müssen ungerade Zahlen sein, mithin kann irgend eine Primzahl außer 2 durch $2n + 1$ angedeutet werden. Ist nun q irgend eine durch $2n + 1$ nicht theilbare Zahl, so ist nach N. 1 $q^{2n} - 1 = (q^n - 1)(q^n + 1)$ durch $2n + 1$ theilbar. Von diesen Faktoren $q^n - 1$ und $q^n + 1$ muß jedenfalls einer durch $2n + 1$ theilbar sein, weil $2n + 1$, als Primzahl, nicht aus Faktoren besteht, die zum Theil in $q^n - 1$ und zum Theil in $q^n + 1$ enthalten sein könnten (vgl. § 95, 1). Andrerseits kann nur einer der beiden Faktoren $q^n - 1$ und $q^n + 1$ durch $2n + 1$ theilbar sein, da sonst auch $(q^n + 1) - (q^n - 1) = 2$ durch $2n + 1$ theilbar sein müßte (§ 94, 1). Demnach läßt q^n, durch $2n + 1$ dividirt, entweder den Rest 1 (wenn $q^n - 1$ durch $2n + 1$ theilbar ist) oder den Rest $2n$ (wenn $q^n + 1$ durch $2n + 1$ theilbar ist).

§ 131.

1. Die Reste, welche sich ergeben, wenn man durch eine Zahl d die Reihe der Potenzen einer andren, durch d nicht theilbaren Zahl n dividirt, heißen die Potenzreste von n und man zählt sie nach den Potenzexponenten als nullten, ersten, zweiten u. s. f. Potenzrest von n nach d. Der nullte Potenzrest ist natürlich, wie die nullte Potenz selbst, in jedem Falle = 1. Man kann diese Potenzreste finden, ohne die Potenzen selbst zu berechnen. Ist nämlich der erste (der Rest der Grundzahl) = a, so muß (§ 129, 5) der zweite gleich dem Reste von a^2 nach d sein; ist dieser = b, so muß der dritte gleich dem Reste von ba nach d sein u. s. f.

2. Hiebei kann die Divisorzahl d, wenn sie eine Produktzahl ist, entweder mit der Potenzengrundzahl n theilerverwandt oder zu dieser theilerfremd sein und im ersten Falle kann d entweder nur Primfaktoren von n enthalten, oder zum Theil auch solche, die nicht in n enthalten sind. Enthält d 1) nur Primfaktoren von n, so wird d in irgend einer höheren (als der ersten) Potenz von n aufgehn (§ 96, 3), so daß für diese und (§ 94, 4) für jede noch höhere Potenz der Rest = 0 ist (§ 92, 2). Ist aber d 2) theilerfremd zu n, oder enthält d 3) außer Primfaktoren von n auch andre, so kann d auch in keiner höheren Potenz von n jemals aufgehn (§ 95, 2; 96, 4; 96, 3); der uneigentliche Rest 0 kann also in diesen Fällen nicht vorkommen, sondern es muß sich eine endlose Reihe eigentlicher Reste ergeben; und ebendies muß auch dann eintreten, wenn d eine Primzahl ist (§ 95, 1). Da sich aber nicht mehr als $d - 1$ verschiedne Reste ergeben können (§ 92, 3) und da, vermöge der Beziehung, in welcher jeder Potenzrest zum nächstvorhergehenden steht (N. 1), sobald irgend einer zum zweitenmal sich ergiebt, die nämlichen Reste, die nach seinem erstmaligen Auftreten der Reihe nach sich ergaben, nun ebenfalls zum zweitenmal in der nämlichen Folge sich ergeben müssen, so muß die endlose Reihe der Potenzreste zugleich eine periodische Wiederkehr der nämlichen Reste zeigen.

3. Ist der zuerst wiederkehrende Rest der nullte, = 1, und ist die Potenz, bei welcher er zuerst wiederkehrt, die mte, so muß die ganze

Restreihe vom 0ten bis zum (m — 1)ten einschließlich sich wiederholen, so daß der (m + 1)te Rest dem ersten, der (m + 2)te dem zweiten u. s. f. gleich ist, endlich der (m + (m — 1))te d. h. (2m — 1)te dem (m — 1)ten. Weiter muß der (2m)te dem mten und 0ten gleich sein u. s. f.; ebenso der (3m)te, (4m)te u. s. f. Also bilden in diesem Falle je m Reste, vom 0ten anfangend, eine Periode von Resten, und die Exponenten der Potenzen, welche 1 zum Rest lassen, sind (mit Einschluß des Nullfachen und Einfachen) lauter Vielfache von m, weßhalb man m den Hauptexponenten nennt.

4. Ist der zuerst wiederkehrende Rest nicht der 0te, sondern ein späterer, allgemein der pte, und ist die Potenz, bei welcher er wiederkehrt, die (p + q)te, so muß der (p + q + 1)te Rest dem (p + 1)ten, der (p + q + 2)te dem (p + 2)ten u. s. f. gleich sein, endlich der (p + q + q)te oder (p + 2q)te dem (p + q)ten und pten u. s. f. Jede Periode umfaßt also in diesem Falle q Reste vom pten an. Natürlich kann von diesen q Resten keiner einem der p Reste vom 0ten bis (p — 1)ten gleich sein, folglich kann auch der Rest 1 hier niemals unter den periodisch wiederkehrenden Resten vorkommen.

5. Dieser letztere Fall (N. 4) tritt dann ein, wenn die Divisorzahl eine mit der Potenzengrundzahl theilerverwandte Produktzahl ist, welche außer Primfaktoren der Potenzengrundzahl noch andre enthält. Denn hier muß der gemeinsame Primfaktor oder das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren entweder schon in der Grundzahl selbst oder doch (§ 96, 3) in einer höheren Potenz, folglich (§ 94, 4) von dieser an auch in allen höheren Potenzen aufgehn; also kann von da an nur noch der nichtgemeinschaftliche Faktor oder das Produkt der nichtgemeinschaftlichen Faktoren der Divisorzahl einen Einfluß auf die sich ergebenden Reste äußern; mithin muß in diesen weiteren Resten ein andres Gesetz herrschen als in den früheren. Dieses neue Gesetz ist eben das der endlosen und dabei periodischen Wiederkehr, während die früheren Reste nur von beschränkter, endlicher Anzahl sein können. Der in N. 3 besprochne Fall muß hingegen eintreten, wenn die Divisorzahl eine zur Potenzengrundzahl theilerfremde Produktzahl oder eine Primzahl ist. Denn wenn, wie dies sein muß, auch hier eine periodische Wiederkehr der Reste stattfindet, so wäre nicht abzusehen, warum sie nicht gleich von vorn herein stattfinden sollte, da hier niemals ein Faktor der Divisorzahl durch Aufgehn in einer höheren Potenz außer Wirksamkeit treten kann, sondern der ganze Divisor von Anfang an ins Unendliche unveränderlich denselben Einfluß auf die sich ergebenden Reste äußern muß.

6. Ist d eine Primzahl, so läßt (§ 130, 1) jedenfalls n^{d-1} nach d den Rest 1, d. h. der 0te Rest kehrt jedenfalls bei der (d — 1)ten Potenz wieder. Zugleich ist d — 1 die höchste Zahl verschiedner Reste, die sich nach d ergeben können, mithin auch die höchste Zahl von Resten, die eine einzige Periode umfassen kann. Es ist aber nicht nothwendig, daß die Periode wirklich so viele Reste umfasse, daß also die (d — 1)te Potenz die erste sei, bei welcher der 0te Rest wiederkehrt;

nur muß dann der Hauptexponent (N. 3) ein Theiler von $d - 1$ sein.

7. Verwandelt man einen Einheitsbruch in einen Decimalbruch, so sind die sich ergebenden Decimalstellen die Quotienten der Division von 10^0, 10^1, 10^2 u. s. f. mit dem Nenner des Bruches. Was nun nach N. 1—6 für die Potenzreste von 10 gilt, läßt sich auch auf die mit ihnen zusammengehörigen Decimalstellen anwenden. Wenn daher der Nenner nur die Primfaktoren 2 und 5 von 10 enthält, also in irgend einer Potenz von 10 aufgeht, so kann, wie die Anzahl der Potenzreste, auch die Anzahl der Decimalstellen nur eine beschränkte, endliche (der Zahl der Potenzreste gleiche) sein; und hieran schließt sich auch der Fall, daß der Nenner 2 oder 5 (also die Potenzengrundzahl durch ihn theilbar) ist. Wenn aber der Nenner eine zu 10 theilerfremde Produktzahl oder eine Primzahl ist, so muß gleich von vorn herein, wie eine periodische Wiederkehr der Potenzreste, so auch eine periodische Wiederkehr der Decimalziffern eintreten. Wenn endlich der Nenner eine Produktzahl ist, welche außer Primfaktoren von 10 auch noch andre enthält, so fängt die periodische Wiederkehr, wie der Potenzreste, so der Decimalstellen nicht gleich mit der ersten an. Jeder andre gemeine Bruch läßt sich aber als ein Produkt seines Zählers und des Einheitsbruches von gleichem Nenner betrachten (§ 43, 2); daher findet Vorstehendes seine Anwendung bei der Verwandlung eines jeden gemeinen Bruches in einen Decimalbruch, vgl. § 107, 3—5.

§ 132.

1. Unter einem Kettenbruche versteht man einen Ausdruck von der Form

$$a + \cfrac{b}{c + \cfrac{d}{e + \cfrac{f}{g}}}$$

in welchem mehrere Brüche mit einer ganzen Zahl oder mit 0 und unter einander so zu einem Ganzen verbunden sind, daß der Zähler eines jeden eine ganze Zahl, der Nenner eine gemischte Zahl (§ 43, 3) ist. Bei numerischen (in Ziffern ausgedrückten) Kettenbrüchen läßt man gewöhnlich die Additionszeichen weg (vgl. § 86, 3), schreibt also z. B.

$$1 \cfrac{2}{3 \cfrac{4}{5 \cfrac{6}{7}}}$$

Nach der Zahl der verbundnen Brüche, die man, einschließlich der ganzen Zahl oder Null, die Glieder des Kettenbruches nennt, unterscheidet man drei-, viergliedrige Kettenbrüche u. s. w. Kettenbrüche von bestimmter Gliederzahl (bei welchen natürlich der Nenner des letzten Gliedes nur eine ganze Zahl ist) nennt man endliche; Kettenbrüche,

bei denen kein Glied als letztes betrachtet werden kann, heißen **unendliche**. Uebrigens versteht man unter Kettenbrüchen vorzugsweise solche, deren einzelne Brüche lauter **Einheitsbrüche** sind, und ausschließlich von diesen **Einheitskettenbrüchen** wird nun weiter die Rede sein.

2. Mit Ausnahme der Einheitsbrüche läßt sich jeder echte und unechte Bruch in einen endlichen Kettenbruch folgendermaßen umformen. Es ist z. B. $\frac{94}{261} = 0 + \frac{94}{261}$, weiter (§ 41, 2) $\frac{94}{261} = \frac{94 : 94}{261 : 94} = \cfrac{1}{2\frac{73}{94}}$, ebenso $\frac{73}{94} = \frac{73 : 73}{94 : 73} = \cfrac{1}{1\frac{21}{73}}$, $\frac{21}{73} = \frac{21 : 21}{73 : 21} = \cfrac{1}{3\frac{10}{21}}$, $\frac{10}{21} = \frac{10 : 10}{21 : 10} = \cfrac{1}{2\frac{1}{10}}$, somit $\frac{94}{261} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10}}}}}$

3. Umgekehrt läßt sich jeder endliche Kettenbruch auf einen einfachen Bruch zurückführen. Ist derselbe z. B.

$z + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}}$, so ist $c + \frac{1}{d} = \frac{cd + 1}{d}$, $b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}} = b + \frac{d}{cd + 1} = \frac{bcd + b + d}{cd + 1}$, $a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}} = a + \frac{cd + 1}{bcd + b + d} = \frac{abcd + ab + ad + cd + 1}{bcd + b + d}$, endlich der ganze Kettenbruch $= z + \frac{bcd + b + d}{abcd + ab + ad + cd + 1} = \frac{zabcd + zab + zad + zcd + z + bcd + b + d}{abcd + ab + ad + cd + 1}$. Hienach läßt sich die Regel aufstellen: man setze den letzten Bruchnenner als **ersten** Ausdruck hin, multiplicire ihn mit dem vorletzten Nenner und addire dazu 1; diesen **zweiten** Ausdruck multiplicire man mit dem drittletzten Nenner und addire den **ersten** Ausdruck; so fahre man fort, diesen dritten und jeden weiterhin gefundnen Ausdruck immer mit dem

nächstvorhergehenden Nenner zu multipliciren und den nächstvorigen Ausdruck zu addiren; der letzte Ausdruck, der sich so ergiebt, ist der Nenner und der vorletzte der Zähler eines Bruches, zu welchem man noch die ganze Zahl des Kettenbruches, falls sie nicht Null ist, zu addiren hat. Nach dieser Regel ergeben sich für obiges Beispiel die Ausdrücke: d; $cd + 1$; $bcd + b + d$; $abcd + ab + ad + cd + 1$, also $z + \frac{bcd + b + d}{abcd + ab + ad + cd + 1}$, wie oben.

4. Wenn man bloß das erste Glied des Kettenbruches, dann die zwei, dann die drei ersten Glieder u. s. f. berücksichtigt und in gewöhnliche Brüche umformt, so kommen die Werthe dieser Theile des Kettenbruches dem Werthe des ganzen Kettenbruches um so näher, je mehr Glieder man beibehält. Man nennt diese Näherungswerthe, insoferne sie außer dem ersten (der ganzen Zahl oder Null) lauter Brüche sind, Näherungsbrüche, Kettennäherungsbrüche. Die weggelassenen Glieder bilden die Ergänzung des Näherungswerthes zum Kettenbruchswerthe.

5. Diese Näherungswerthe lassen sich nach folgender Regel entwickeln: ist der Kettenbruch z. B. der in N. 3 angegebene, so ist $z = \frac{z}{1}$ der erste Näherungswerth (ebenso $0 = \frac{0}{1}$, wenn 0 anstatt z steht); der zweite ergiebt sich, wenn man Zähler und Nenner des ersten mit dem nächsten Kettenbruchsnenner a multiplicirt und im Zähler noch 1 addirt, ist also $= \frac{za + 1}{a}$; der dritte und jeder folgende wird erhalten, wenn man Zähler und Nenner des zuletzt gefundnen mit dem nächsten Kettenbruchsnenner multiplicirt und im Zähler noch den Zähler, im Nenner noch den Nenner des nächstvorigen Näherungsbruches addirt, so daß der dritte $= \frac{zab + b + z}{ab + 1}$, der vierte $= \frac{zabc + bc + zc + za + 1}{abc + c + a}$ ist. Geht man hiebei bis zum letzten Kettenbruchsnenner (wenn der Kettenbruch ein endlicher ist) fort, so ergiebt sich der Werth des ganzen Kettenbruches; in diesem Beispiel $= \frac{zabcd + bcd + zcd + zad + d + zab + b + z}{abcd + cd + ad + ab + 1}$, übereinstimmend mit N. 3.

6. Vorstehende Regel läßt sich so begründen. Da der erste Näherungswerth $= z$, der zweite $= z + \frac{1}{a}$, der dritte $= z + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b}}$, der vierte $= z + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}}$ ist, so muß sich aus dem zweiten der dritte, aus diesem der vierte u. s. f. ergeben, wenn man im Ausdrucke irgend eines solchen Näherungswerthes den

letzten darin enthaltenen Kettenbruchsnenner a oder b oder c u. s. f. bezüglich mit $a + \frac{1}{b}$, $b + \frac{1}{c}$, $c + \frac{1}{d}$ u. s. f. vertauscht. Sind nun $\frac{M_1}{M}$, $\frac{N_1}{N}$, $\frac{P_1}{P}$, $\frac{Q_1}{Q}$ vier aufeinanderfolgende Näherungswerthe und ist p der letzte in $\frac{P_1}{P}$ und q der letzte in $\frac{Q_1}{Q}$ enthaltene Kettenbruchsnenner, so müßte nach der Regel in N. 5 $\frac{P_1}{P} = \frac{M_1 + N_1 p}{M + Np}$ sein; ist dies aber der Fall, so muß nach dem so eben Bemerkten $\frac{Q_1}{Q}$ $= \frac{M_1 + N_1\left(p + \frac{1}{q}\right)}{M + N\left(p + \frac{1}{q}\right)}$ sein; dies ist aber $\frac{M_1 q + N_1 pq + N}{Mq + Npq + N} = \frac{N_1 + (M_1 + N_1 p)q}{N + (M + Np)q}$, d. h. $= \frac{N_1 + P_1 q}{N + Pq}$, wenn $M_1 + N_1 p = P_1$ und $M + Np = P$. Wenn daher $\frac{P_1}{P}$ aus $\frac{M_1}{M}$ und $\frac{N_1}{N}$ nach N. 5 abgeleitet werden kann, so ergiebt sich nach ebendieser Regel auch $\frac{Q_1}{Q}$ aus $\frac{N_1}{N}$ und $\frac{P_1}{P}$; da nun wirklich $\frac{zab + b + z}{ab + 1}$ oder $\frac{z + zab + b}{1 + ab} = z + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b}}$ ist (vgl. N. 3), also schon der dritte Näherungswerth aus dem ersten und zweiten nach der Regel abgeleitet werden kann, so ist sie auch für den vierten gültig u. s. f.

7. Sind $\frac{M_1}{M}$, $\frac{N_1}{N}$, $\frac{P_1}{P}$ drei aufeinanderfolgende Näherungsbrüche und ist p der letzte in $\frac{P_1}{P}$ enthaltene Kettenbruchsnenner, so ist nach N. 5 und 6 $\frac{P_1}{P} = \frac{M_1 + N_1 p}{M + Np}$, also $\frac{N_1}{N} - \frac{P_1}{P} = \frac{N_1}{N}$ $- \frac{M_1 + N_1 p}{M + Np} = \frac{N_1 M - NM_1}{N(M + Np)} = \frac{N_1 M - NM_1}{NP}$; ferner ist $\frac{M_1}{M} - \frac{N_1}{N} = \frac{M_1 N - MN_1}{MN}$. Ist nun $M_1 N - MN_1$ eine positive Zahl, so ist nothwendig $N_1 M - NM_1 = -(NM_1 - N_1 M)$ eine negative, und umgekehrt; ist also $\frac{M_1}{M} \gtrless \frac{N_1}{N}$, so muß $\frac{N_1}{N} \lessgtr \frac{P_1}{P}$ sein, d. h. wenn ein Näherungsbruch kleiner oder größer als der nächstvorhergehende ist, so ist er auch bezüglich kleiner oder größer als der nächstfolgende.

Da nun der erste Näherungswerth z (mag nun z eine eigentliche Zahl oder Null bedeuten) kleiner ist als der zweite $z + \frac{1}{a}$, so ist dieser auch größer als der dritte, und dieser ist, weil kleiner als der zweite, auch kleiner als der vierte u. s. f., so daß überhaupt die Näherungsbrüche von ungerader Ordnungszahl (der erste, dritte, fünfte u. s. w.) die kleineren, die von gerader Ordnungszahl (der zweite, vierte, sechste u. s. w.) die größeren im Vergleiche mit je zwei zunächstliegenden sind.

8. Nach N. 7 ist der Zähler des Differenzbruches $\frac{N_1 M - NM_1}{NP}$ $= \frac{-(NM_1 - N_1 M)}{NP}$ nur durch das Vorzeichen verschieden vom Zähler des Differenzbruches $\frac{M_1 N - MN_1}{MN}$, d. h. der Zähler des Bruches, welcher die Differenz zwischen einem Näherungsbruche und dem nächstfolgenden angiebt, ist nur hinsichtlich des Vorzeichens verschieden vom Zähler des Bruches, welcher die Differenz zwischen dem ersteren Näherungsbruche und dem nächstvorhergehenden ausdrückt. Nun ist (vgl. N. 5) $\frac{z}{1} - \frac{za + 1}{a} = \frac{-1}{1 \cdot a}$, $\frac{za + 1}{a} - \frac{zab + b + z}{ab + 1} = \frac{+1}{a(ab + 1)}$, mithin muß der Zähler des Differenzbruches zwischen dem dritten und vierten Näherungsbruche wieder -1 sein u. s. f. und es ist überhaupt der Zähler jedes solchen Differenzbruches $= \pm 1$, nämlich $+1$, wenn der Minuend ein Näherungsbruch von gerader, -1, wenn derselbe von ungerader Ordnungszahl ist (N. 7). Die Nenner dieser Differenzbrüche werden aber immer größer, da $NP > MN$, weil $P = M + Np$; folglich werden die Differenzbrüche, abgesehen von den Vorzeichen, immer kleiner, woraus erhellt, daß die Näherungsbrüche von ungerader Ordnungszahl immer größer, die von gerader immer kleiner werden.

9. Sind $\frac{N_1}{N}$, $\frac{P_1}{P}$, $\frac{Q_1}{Q}$ drei aufeinanderfolgende Näherungsbrüche und ist q der letzte in $\frac{Q_1}{Q}$ enthaltene Kettenbruchsnenner, r_1 der hiezu gehörige Rest der Division und r der zugehörige Divisor (wie in dem Beispiele N. 2 der zum Nenner 3 gehörige Rest der Division 10 und der zugehörige Divisor 21 ist), so muß sich der volle Werth des Kettenbruches ergeben, wenn man in $\frac{N_1 + P_1 q}{N + Pq} = \frac{Q_1}{Q}$ das q mit $q + \frac{r_1}{r}$ vertauscht. Dadurch erhält man $\frac{N_1 r + P_1 (qr + r_1)}{Nr + P(qr + r_1)} = \frac{P_1 r_1 + (N_1 + P_1 q)r}{Pr_1 + (N + Pq)r} = \frac{P_1 r_1 + Q_1 r}{Pr_1 + Qr}$. Also ist die Differenz zwischen

dem Kettenbruche und dem Näherungsbruche $\frac{Q_1}{Q}$ $\frac{P_1 r_1 + Q_1 r}{P r_1 + Q r}$ — $\frac{Q_1}{Q} = \frac{(P_1 Q - P Q_1) r_1}{(P r_1 + Q r) Q}$. Es ist aber $\frac{P_1}{P} - \frac{Q^1}{Q} = \frac{P_1 Q - P Q_1}{P Q}$, also (N. 8) $P_1 Q - P Q_1 = \pm 1$ und $\frac{(P_1 Q - P Q_1) r_1}{(P r_1 + Q r) Q} = \frac{\pm r_1}{(P r_1 + Q r) Q}$, je nachdem $\frac{Q_1}{Q}$ ein Näherungsbruch von ungerader oder gerader Ordnungszahl ist. Der Kettenbruch ist also größer als alle Näherungsbrüche von ungerader und kleiner als alle von gerader Ordnungszahl. Hieraus folgt erstens, daß jeder ungerade Näherungsbruch nicht bloß (vgl. N. 7) kleiner als die zwei zunächstliegenden geraden, sondern als jeder gerade ist; zweitens, daß (abgesehen von den Vorzeichen) die Differenz zwischen je zwei zunächst aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen größer ist als die Differenz zwischen jedem von ihnen und dem Kettenbruche (der zwischen ihnen liegt).

10. Da $\frac{r_1}{(P r_1 + Q r) Q} = \frac{1}{\left(P + Q \frac{r}{r_1}\right) Q}$ und $r > r_1$, somit $\frac{r}{r_1} > 1$, $Q \frac{r}{r_1} > Q$, um so mehr also $P + Q \frac{r}{r_1} > Q$, so ist $\left(P + Q \frac{r}{r_1}\right) Q > Q^2$ und $\frac{r_1}{(P r_1 + Q r) Q} < \frac{1}{Q^2}$, d. h. die Differenz zwischen dem ganzen Kettenbruch und irgend einem Näherungsbruch ist jedenfalls kleiner als ein Einheitsbruch, der das Quadrat des Näherungsbruchnenners zum Nenner hat. Da ferner $\frac{P_1 r_1 + Q_1 r}{P r_1 + Q r} - \frac{P_1}{P} = \frac{-(P_1 Q - P Q_1) r}{(P r_1 + Q r) P} = \frac{\mp r}{(P r_1 + Q r) P}$ und $(P r_1 + Q r) P < (P r_1 + Q r) Q$, $r > r_1$, so ist $\frac{r}{(P r_1 + Q r) Q} < \frac{r}{(P r_1 + Q r) P}$; folglich kommen die Näherungsbrüche wie sie der Reihe nach aufeinanderfolgen dem Werthe des Kettenbruches wirklich immer näher (N. 4).

11. Aus N. 8 folgt nach § 102, 1, daß alle Näherungsbrüche Primbrüche sind; wenn daher ein gewöhnlicher Bruch, dessen Zähler und Nenner theilerverwandt sind, in einen Kettenbruch verwandelt wird und dann nach N. 5 die Näherungsbrüche entwickelt werden, so daß man bis zum letzten Kettenbruchsnenner fortgeht, so ergiebt sich zuletzt wieder der Werth des ganzen Bruches, aber nunmehr in den kleinsten Zahlen ausgedrückt (auf den einfachsten Ausdruck reducirt). Ferner kann nach § 102, 2 zwischen zwei zunächst aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen kein Bruch liegen, dessen Nenner kleiner als der des zweiten Näherungsbruches wäre. Hienach giebt es auch keinen Bruch, der bei kleinerem Nenner als der Nenner eines Näherungsbruches $\frac{Q_1}{Q}$ dem Kettenbruchs-

werthe näher läge als dieser Näherungsbruch; also wird durch diese Näherungsbrüche bei möglichst kleinen Zahlen die möglichste Annäherung an den wahren Werth erreicht. Sollte es nämlich einen solchen Bruch $\frac{S_1}{S}$ geben, dessen Nenner $S < Q$ und der zugleich dem Werthe des Kettenbruches näher läge als $\frac{Q_1}{Q}$, so müßte $\frac{S_1}{S}$ zwischen $\frac{Q_1}{Q}$ und dem nächstvorhergehenden Näherungsbruche $\frac{P_1}{P}$ liegen. Denn bezeichnet man den Kettenbruchswerth mit $\frac{K_1}{K}$, so ist (N. 9) entweder $\frac{P_1}{P} > \frac{K_1}{K} > \frac{Q_1}{Q}$ oder $\frac{P_1}{P} < \frac{K_1}{K} < \frac{Q_1}{Q}$. Soll nun $\frac{K_1}{K} - \frac{S_1}{S} < \frac{K_1}{K} - \frac{Q_1}{Q}$ sein (wobei wieder von den Vorzeichen abzusehen ist), so müßte im ersten Falle entweder $\frac{K_1}{K} > \frac{S_1}{S} > \frac{Q_1}{Q}$ sein, oder wenn $\frac{S_1}{S} > \frac{K_1}{K}$ wäre, so könnte wenigstens nicht $\frac{S_1}{S} > \frac{P_1}{P}$ sein, weil dann $\frac{K_1}{K} - \frac{S_1}{S} > \frac{K_1}{K} - \frac{P_1}{P}$ wäre, da doch (N. 10) $\frac{K_1}{K} - \frac{P_1}{P} > \frac{K_1}{K} - \frac{Q_1}{Q}$ ist und $\frac{K_1}{K} - \frac{Q_1}{Q} > \frac{K_1}{K} - \frac{S_1}{S}$ sein soll; mithin hätte man nothwendig $\frac{P_1}{P} > \frac{S_1}{S} > \frac{K_1}{K}$, und $\frac{S_1}{S}$ läge demnach entweder zwischen $\frac{K_1}{K}$ und $\frac{Q_1}{Q}$ oder zwischen $\frac{P_1}{P}$ und $\frac{K_1}{K}$, somit jedenfalls auch zwischen $\frac{P_1}{P}$ und $\frac{Q_1}{Q}$. Im zweiten Falle $\left(\text{wenn } \frac{P_1}{P} < \frac{K_1}{K} < \frac{Q_1}{Q}\right)$ müßte entweder $\frac{K_1}{K} < \frac{S_1}{S} < \frac{Q_1}{Q}$ sein, oder wenn $\frac{S_1}{S} < \frac{K_1}{K}$ wäre, so könnte doch nicht $\frac{S_1}{S} < \frac{P_1}{P}$ sein, weil dann wieder $\frac{K_1}{K} - \frac{S_1}{S} > \frac{K_1}{K} - \frac{P_1}{P}$ wäre u. s. f.; mithin müßte $\frac{P_1}{P} < \frac{S_1}{S} < \frac{K_1}{K}$ sein, und $\frac{S_1}{S}$ läge daher auch in diesem Falle entweder zwischen $\frac{K_1}{K}$ und $\frac{Q_1}{Q}$ oder zwischen $\frac{P_1}{P}$ und $\frac{K_1}{K}$, somit jedenfalls zwischen $\frac{P_1}{P}$ und $\frac{Q_1}{Q}$. Wenn daher (s. oben) zwischen $\frac{P_1}{P}$ und $\frac{Q_1}{Q}$ überhaupt kein

Bruch $\frac{S_1}{S}$ liegen kann, dessen Nenner $S < Q$, so kann es auch keinen solchen Bruch geben, der dem Werthe des Kettenbruches näher läge als $\frac{Q_1}{Q}$.

12. Wohl aber giebt es öfters sogar mehr als einen Bruch, der bei kleinerem Nenner als Q dem Kettenbruchswerthe wenigstens näher liegt als $\frac{P_1}{P}$. Denn da $\frac{Q_1}{Q} = \frac{N_1 + P_1 q}{N + Pq}$, so sind, wenn q von 1 verschieden ist, q — 1 Brüche $\frac{N_1 + P_1}{N + P}, \frac{N_1 + P_1 . 2}{N + P . 2}, \frac{N_1 + P_1 . 3}{N + P . 3}$ .... bis $\frac{N_1 + P_1 (q - 1)}{N + P (q - 1)}$ möglich, deren Nenner alle $< N + Pq$ d. h. $< Q$, und diese Brüche ergeben sich nach § 47, 2 zuerst aus $\frac{N_1}{N}$ und $\frac{P_1}{P}$, dann aus $\frac{N_1 + P_1}{N + P}$ und $\frac{P_1}{P}$, dann aus $\frac{N_1 + P_1 . 2}{N + P . 2}$ und $\frac{P_1}{P}$ u. s. f., liegen also alle zwischen $\frac{N_1}{N}$ und $\frac{P_1}{P}$; da nun der Kettenbruch ebenfalls zwischen $\frac{N_1}{N}$ und $\frac{P_1}{P}$ liegt, so wird ihm jedenfalls der eine oder der andre dieser eingeschalteten Brüche näher kommen als $\frac{N_1}{N}$ und $\frac{P_1}{P}$. Ist aber $q = 1$, so kann es natürlich keinen solchen Bruch geben $\left(\text{weil dann schon } \frac{N_1 + P_1}{N + P} = \frac{Q_1}{Q}\right)$. Man kann diese Brüche Nebennäherungsbrüche, dagegen die sich unmittelbar aus dem Kettenbruch ergebenden Hauptnäherungsbrüche nennen.

Viertes Kapitel. Zur Lehre von der Radicirung.

§ 133.

1. Soll aus einem Polynom eine Wurzel, namentlich die Quadrat- oder Kubikwurzel gezogen werden, so hat man ein Verfahren anzuwenden, das theils der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel aus einer numerisch ausgedrückten Zahl (§ 111 ff.) theils der Division von und mit Polynomen (§ 127) ähnlich ist. Man ordnet nämlich den Radikanden nach den Buchstaben und zwar nach Potenzen, sucht die Wurzel des ersten Gliedes zu bestimmen, zieht dieses ab, dividirt, wenn die Quadratwurzel gesucht wird, mit der mit 2 multiplicirten Wurzel des ersten Gliedes das erste Glied des Restes, zieht dieses und das Quadrat des Quotienten ab u. s. w., und ähnlich verfährt man auch bei der Ausziehung der Kubikwurzel.

Es ist z. B. $\sqrt{(25a^4b^2 - 30a^3b^4 + 9a^2b^6)} = 5a^2b - 3ab^3$; denn es ist $\sqrt{25a^4b^2} = 5a^2b$, $\frac{-30a^3b^4}{2 \cdot 5a^2b} = -3ab^3$, $(-3ab^3)^2 = 9a^2b^6$.

Ebenso ist z. B. $\sqrt[3]{(8a^6 - 36a^4b^2 + 54a^2b^4 - 27b^6)} = 2a^2 - 3b^2$; denn es ist $\sqrt[3]{8a^6} = 2a^2$, $\frac{-36a^4b^2}{3 \cdot (2a^2)^2} = -3b^2$, $3 \cdot 2a^2 \cdot (-3b^2)^2 = 54a^2b^4$, $(-3b^2)^3 = -27b^6$.

2. Die Quadratwurzel aus einem Binom von der Form $A \pm \sqrt{B}$ läßt sich folgendermaßen in eine Summe oder Differenz zweier Quadratwurzeln umformen. Es ist $(\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}})^2 = 2\,(A + \sqrt{A^2 - B})$, ebenso $(\sqrt{A + \sqrt{B}} - \sqrt{A - \sqrt{B}})^2 = 2\,(A - \sqrt{A^2 - B})$, mithin $\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{2\,(A + \sqrt{A^2 - B})}$ und $\sqrt{A + \sqrt{B}} - \sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{2\,(A - \sqrt{A^2 - B})}$, ferner $(\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}}) + (\sqrt{A + \sqrt{B}} - \sqrt{A - \sqrt{B}})$ oder $2\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{2\,(A + \sqrt{A^2 - B})} + \sqrt{2\,(A - \sqrt{A^2 - B})}$, also $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(A + \sqrt{A^2 - B})} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(A - \sqrt{A^2 - B})}$, und ebenso ist $(\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}}) - (\sqrt{A + \sqrt{B}} - \sqrt{A - \sqrt{B}})$ oder $2\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{2\,(A + \sqrt{A^2 - B})} - \sqrt{2\,(A - \sqrt{A^2 - B})}$, also $\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(A + \sqrt{A^2 - B})} - \sqrt{\tfrac{1}{2}(A - \sqrt{A^2 - B})}$.

§ 134.

1. Ist n keine Quadratzahl, a^2 die nächstkleinere Quadratzahl, $n - a^2 = b$, also $\sqrt{n} = \sqrt{a^2 + b}$, so ist, wenn man $\sqrt{n} = a + c$ setzt, $n = a^2 + b = (a + c)^2 = a^2 + 2ac + c^2$, mithin $b = 2ac + c^2 = (2a + c)\,c$ und $\frac{b}{2a + c} = c$. Indem man nun in $\frac{b}{2a + c}$ das c durch $\frac{b}{2a + c}$ ersetzt, in diesem letzteren Ausdrucke abermals $\frac{b}{2a + c}$ für c setzt u. s. f., ergiebt sich $\sqrt{n} =$

$$a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}}}$$

. Diesen Kettenbruch kann man beliebig weit fortsetzen, und indem man daraus (vgl. § 132,

4 ff.) einen ersten, zweiten, dritten u. s. f. Näherungsbruch ableitet, ergiebt sich der Werth von $\sqrt{n}$ immer genauer. Für $\sqrt{19}$, wo $a = 4$, $b = 3$, erhält man z. B. die Werthe 4, $\frac{35}{8}$, $\frac{292}{67}$, $\frac{2441}{560}$, $\frac{20404}{4681}$..

2. Ferner kann man jede irrationale Quadratwurzel auch in einen Einheitskettenbruch verwandeln, auf ganz ähnliche Art wie einen gemeinen Bruch (§ 132, 2). Es ist z. B. $\sqrt{19} = 4 + (\sqrt{19} - 4)$

$$= 4 + \frac{\sqrt{19} - 4}{1} = 4 + \frac{(\sqrt{19} - 4)(\sqrt{19} + 4)}{1(\sqrt{19} + 4)} =$$

$$4 + \frac{3}{\sqrt{19} + 4} = 4 + \frac{1}{(\sqrt{19} + 4) : 3}; \quad \frac{\sqrt{19} + 4}{3} =$$

$$\frac{(\sqrt{19} - 4) + 8}{3} = 2 + \frac{(\sqrt{19} - 4) + 2}{3} = 2 + \frac{\sqrt{19} - 2}{3}$$

$$= 2 + \frac{(\sqrt{19} - 2)(\sqrt{19} + 2)}{3(\sqrt{19} + 2)} = 2 + \frac{5}{\sqrt{19} + 2} =$$

$$2 + \frac{1}{(\sqrt{19} + 2) : 5}; \quad \frac{\sqrt{19} + 2}{5} = \frac{(\sqrt{19} - 4) + 6}{5} =$$

$$1 + \frac{(\sqrt{19} - 4) + 1}{5} = 1 + \frac{\sqrt{19} - 3}{5} =$$

$$1 + \frac{(\sqrt{19} - 3)(\sqrt{19} + 3)}{5(\sqrt{19} + 3)} = 1 + \frac{2}{\sqrt{19} + 3} =$$

$$1 + \frac{1}{(\sqrt{19} + 3) : 2}; \quad \frac{\sqrt{19} + 3}{2} = \frac{(\sqrt{19} - 4) + 7}{2} =$$

$$3 + \frac{(\sqrt{19} - 4) + 1}{2} = 3 + \frac{\sqrt{19} - 3}{2} = 3 + \frac{(\sqrt{19} - 3)(\sqrt{19} + 3)}{2(\sqrt{19} + 3)}$$

$$= 3 + \frac{5}{\sqrt{19} + 3} = 3 + \frac{1}{(\sqrt{19} + 3) : 5}; \quad \frac{\sqrt{19} + 3}{5} =$$

$$\frac{(\sqrt{19} - 4) + 7}{5} = 1 + \frac{(\sqrt{19} - 4) + 2}{5} = 1 + \frac{\sqrt{19} - 2}{5} =$$

$$1 + \frac{(\sqrt{19} - 2)(\sqrt{19} + 2)}{5(\sqrt{19} + 2)} = 1 + \frac{3}{\sqrt{19} + 2} =$$

$$1 + \frac{1}{(\sqrt{19} + 2) : 3}; \quad \frac{\sqrt{19} + 2}{3} = \frac{(\sqrt{19} - 4) + 6}{3} =$$

$$2 + \frac{\sqrt{19} - 4}{3} = 2 + \frac{(\sqrt{19} - 4)(\sqrt{19} + 4)}{3(\sqrt{19} + 4)} = 2 + \frac{1}{\sqrt{19} + 4}$$

$$= 2 + \frac{1}{(\sqrt{19} + 4) : 1}; \quad \frac{\sqrt{19} + 4}{1} = \frac{(\sqrt{19} - 4) + 8}{1} =$$

$8 + \frac{\sqrt{19} - 4}{1}$, und da dieser Ausdruck $\frac{\sqrt{19} - 4}{1} = \frac{1}{(\sqrt{19} + 4) : 3}$ schon einmal, gleich Anfangs, vorgekommen ist, so müssen sich von nun an die bereits gefundnen Kettenbruchsnenner 2, 1, 3, 1, 2, 8 periodisch wiederkehrend ins Unendliche fort ergeben, und zwar giebt nicht etwa bloß $\sqrt{19}$, sondern jede irrationale Quadratwurzel einen solchen periodischen Kettenbruch. Für $\sqrt{19} =$

$$4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8 + \ldots}}}}}}$$

ergeben sich weiter die Näherungswerthe $4, \frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{48}{11}, \frac{61}{14}, \frac{170}{39}, \frac{1421}{326} \ldots$

Viertes Buch.

Erstes Kapitel. Größen und benannte Zahlen.

§ 135.

1. Jede Verbindung gleichartiger und gleichnamiger Dinge zu einem Ganzen und alles, was sich als eine solche betrachten läßt, ist eine Größe. Dieser Begriff fällt also gewissermaßen mit dem der Vielheit oder Menge (§ 2.) zusammen, ist aber umfassender als dieser, weil er nicht bloß alles das umschließt, was sich unmittelbar als eine Menge darstellt, sondern auch alles, was, ohne unmittelbar als eine Menge zu erscheinen, doch als eine solche vom Verstande aufgefaßt werden kann.

2. Zwei oder mehrere Größen, welche sich auf ein und dasselbe Einzelding, auf eine und dieselbe Einheit zurückführen, als Mengen von einerlei Einzeldingen oder Einheiten betrachten lassen, sind gleichartige Größen; solche, bei denen dies nicht der Fall ist, sind ungleichartige.

3. Untersuchen, wie oft das Einzelding oder die Einheit in der Größe enthalten ist, heißt: die Größe messen. Das Einzelding oder die Einheit heißt in dieser Beziehung auch das Maß; das Messen aber ist, insofern als es sich dabei um die Bestimmung einer Vielheit handelt, eins mit dem Zählen (§ 2, 3).

4. Wenn die Einheit selbst wieder als Größe, als Inbegriff von Einheiten betrachtet werden kann; wenn dann diese letzteren Einheiten auch wieder als Größen betrachtet werden können u. s. f., so nennt man die Größe eine stetige; kann aber die Einheit nicht selbst wieder als Größe betrachtet werden, sondern ist sie ein untheilbares Einzelding, ein Individuum, so ist die Größe, welche sich als ein Inbegriff solcher Einheiten darstellt, eine diskrete.

5. Vorzugsweise versteht man übrigens unter Größen nur

die stetigen. Solcher stetigen Größen giebt es vier Hauptarten, nämlich Raumgrößen (Linien, Flächen, Körper, Winkel), Zeitgrößen, Kraftgrößen (Bewegungen, Massen, Gewichte), Werthgrößen (Geldgrößen, Rechnungsmünzen).

§ 136.

1. Hat man eine Größe gemessen, so kann man sie dadurch bezeichnen, daß man die Zahl ausspricht, welche angiebt, wie oft die Einheit oder das Maß in der Größe enthalten ist, und dabei diese Einheit nennt, also z. B. zwei Fuß sagt, um damit eine gemessene Linie zu bezeichnen, welche die linearische oder Längen-Einheit, Fuß genannt, zweimal enthält. Ein solcher Ausdruck für eine gemessene Größe heißt eine benannte Zahl, und die Zahl, welche er enthält, heißt die Maßzahl oder Meßzahl der Größe. Im Gegensatze hievon heißen die Zahlen unbenannte Zahlen, so lange sie nicht auf diese Art zum arithmetischen Ausdrucke von Größen verwendet, sondern an und für sich aufgefaßt und gesetzt werden.

2. Bei den diskreten Größen ist die Maßzahl nothwendig eine ganze Zahl, da hier die Einheit untheilbar ist, und die Größe ist immer eine wirkliche Menge von selbständigen Einzeldingen. Bei den stetigen Größen kann aber die Maßzahl auch gebrochen und selbst irrational sein. Denn jede stetige Größe stellt sich (vgl. § 135, 1) nicht unmittelbar als eine Menge von Einzeldingen dar, sondern vielmehr als ein zusammenhängendes Ganzes, das jedoch als ein Inbegriff von Einheiten aufgefaßt werden kann, von denen sich jede wieder als ein solcher Inbegriff betrachten läßt u. s. f. Bei den stetigen Größen ist, mit andren Worten, die Sonderung in Einheiten nicht eine schon gegebene, natürliche, sondern eine erst vom Verstande in die Größen, wie sie sich unmittelbar darstellen, hineingetragene, künstliche und willkürliche, und die Einheit ist hier nicht ein gegebenes untheilbares Ding, sondern ein willkürlich abgegränzter Theil der Größe, den man sich wieder in Theile getheilt denken kann u. s. f. Da kann denn wohl der Fall eintreten, daß eine gegebene Größe sich nicht völlig genau auf eine solche willkürlich festgesetzte Einheit zurückführen läßt; es kann sich nämlich ergeben, daß das angenommene Maß zwar eine Anzahl Male in der Größe enthalten ist, daß aber von dieser noch ein Stück übrig bleibt, welches kleiner als die angenommene Einheit ist. Findet sich nun, daß dieses Stück einen bestimmten z. B. den zehnten Theil der Einheit einmal oder einigemal enthält, so ergiebt sich in Bezug auf diese Einheit eine gebrochne Zahl als Maßzahl der Größe. Es kann aber auch der Fall sein, daß kein Theil der Einheit, man mag sie in so viele Theile als man will theilen, genau in dem übriggebliebenen Stücke der Größe enthalten ist, sondern immer noch Etwas übrig bleibt, so daß die Größe weder auf die angenommene Einheit selbst noch auf einen bestimmten Theil derselben völlig genau zurückgeführt werden kann. Soll dann doch die Größe wenigstens annähernd genau durch eine benannte Zahl, wobei diese Einheit zu Grunde liegt, ausgedrückt wer-

den, so kann die Maßzahl weder eine ganze noch eine gebrochne, sondern nur eine zwischen zwei ganze Zahlen fallende, aber keinem Bruche genau gleiche Zahl d. h. (§ 97, 6) eine Irrationalzahl sein.

3. Wenn man zwei Größen mit demselben Maße mißt und es ergiebt sich für jede eine rationale (ganze oder gebrochne) Maßzahl, so sind die Größen kommensurabel, maßverwandt. Wenn sich aber für die eine Größe eine rationale, für die andre eine irrationale Maßzahl ergiebt, so sind die Größen inkommensurabel, maßfremd. Wenn endlich beide Maßzahlen irrational sind, so können die Größen entweder kommensurabel oder inkommensurabel sein, d. h. es ist entweder möglich, beide Größen durch irgend eine andre Einheit mit völliger Genauigkeit zu messen, oder es giebt keine solche Einheit, wodurch beide Größen zugleich völlig genau gemessen werden könnten.

§ 137.

1. Zahlen, welche als Maßzahlen mit einem und demselben Einheitsnamen zu benannten Zahlen verbunden sind, heißen gleichbenannte Zahlen.

2. Wenn sich beim Messen zweier Größen mit derselben Einheit dieselbe Zahl ergiebt, so sind die Größen in arithmetischer Hinsicht gleich, wobei sie in andrer Hinsicht, z. B. Raumgrößen in Bezug auf ihre Gestalt, immerhin verschieden sein können. Ergiebt sich aber bei der einen Größe eine größere Maßzahl als bei der andren, so ist jene größer als diese.

3. Benannte Zahlen sind aber nicht bloß dann gleich, wenn sie (vgl. N. 2) aus derselben Zahl und demselben Einheitsnamen bestehn, sondern es können auch ungleichbenannte Zahlen einander gleich sein, wenn sie nämlich dieselbe Größe ausdrücken. Letzteres ist aber wohl möglich; denn da bei den stetigen Größen die Einheit nicht schon gegeben ist, sondern erst willkürlich festgesetzt wird, überdies selbst wieder als eine aus Einheiten bestehende Größe betrachtet werden kann, so kann eine und dieselbe Größe auf verschiedne Einheiten zurückgeführt, demnach auch durch verschiedne verschieden benannte Zahlen ausgedrückt werden.

§ 138.

1. Zwei gleichartige Größen (§ 135, 2) kann man sich zu einer Größe verbunden denken, und diese letztere kann, wenn die ersteren durch gleichbenannte Zahlen ausgedrückt sind, durch die Summe der Maßzahlen jener beiden Größen und durch den Namen der angenommenen Einheit arithmetisch ausgedrückt werden, oder, wenn man z. B. die Maßzahlen mit a und b, die Einheit mit E, die erste Größe mit aE, die zweite mit bE bezeichnet, so ist $(a + b)E$ der Ausdruck für ihre Verbindung zu einem Ganzen. Auf diese Art aus zwei gleichbenannten Zahlen eine dritte ebenso benannte herleiten, heißt: die gegebenen gleichbenannten Zahlen addiren; die sich ergebende ebenso benannte Zahl heißt die Summe der gegebenen und jede von diesen ein Summand

dieser Summe. Insofern aber gleichartige Größen jedenfalls durch gleichbenannte Zahlen ausgedrückt werden können, kann man, auch wenn dies nicht schon geschehen ist, dennoch den Begriff und die bildliche Darstellung der Addition auf solche Größen anwenden, ihre Verbindung zu einem Ganzen ihre Summe, sie selbst die Summanden nennen, die Summe, wenn etwa die einzelnen Größen mit A und B bezeichnet sind, durch $A + B$ ausdrücken u. s. w.

2. Eine benannte Zahl von einer andren gleichbenannten subtrahiren heißt: eine dritte ebenso benannte Zahl aus ihnen ableiten, welche, wenn man die zweite zu ihr addirt, die erste giebt; die erste nennt man den Minuenden, die zweite den Subtrahenden, die dritte die Differenz, und wenn der Minuend mit aE, der Subtrahend mit bE bezeichnet wird, so kann man die Differenz durch $(a - b)E$ ausdrücken. Weiterhin nennt man aber auch das Wegnehmen einer Größe von einer gleichartigen selbst dann, wenn beide nicht durch benannte Zahlen ausgedrückt sind, das Subtrahiren jener Größe von dieser, heißt jene den Subtrahenden, diese den Minuenden, das, was von letzterer nach der Wegnahme der ersteren übrig bleibt, die Differenz, und bezeichnet diese, wenn etwa der Minuend durch A, der Subtrahend durch B vorgestellt wird, mit $A - B$.

3. Ebenso giebt es auch mehrgliedrige gleichartige und gemischte Summen von gleichbenannten Zahlen und überhaupt von gleichartigen Größen.

§ 139.

1. Wenn sich beim Subtrahiren gleichbenannter Zahlen eine Differenz $= 0$ als Maßzahl ergiebt, so hat ein solcher Ausdruck 0E nur die Form einer benannten Zahl, kann aber keineswegs irgend eine wirkliche Größe bezeichnen; denn eine Größe, worin die Einheit 0mal enthalten wäre, ist ein Unding; vielmehr ist daraus nur zu schließen, daß Minuend und Subtrahend einander gleich sind, sowie aus $a - b = 0$ folgt, daß $b = a$ sein muß.

2. Wenn sich ferner beim Subtrahiren gleichbenannter Zahlen eine negative Zahl als Maßzahl ergiebt, so hat ein solcher Ausdruck wie $(-a)E$ wieder nur die Form einer benannten Zahl, ohne an und für sich und als letztes Ergebniß betrachtet eine wirkliche Bedeutung zu haben; denn eine Größe, worin die Einheit $(-a)$mal enthalten sein soll, ist ein Unding; vielmehr ist daraus zunächst nur zu entnehmen, daß man das, was man für den Subtrahenden genommen hat, eigentlich als Minuenden hätte betrachten sollen und umgekehrt; daß, mit andren Worten, der Subtrahend eine größere Größe ausdrückt als der Minuend. Inzwischen können bei der Anwendung der Arithmetik auf Größen Fälle eintreten, in denen es aus gewissen Rücksichten zweckmäßig erscheint, eine von diesen Größen einfürallemal als den Minuenden und die andern als Subtrahenden zu betrachten. Wenn sich nun hiebei mitunter auch negative Zahlen als Maßzahlen ergeben, so hat dies nichts zu sagen; wofern diese Ausdrücke nur richtig abgeleitet sind, werden sie, wiewohl an sich bedeutungslos, doch in Verbindung mit anderweitigen

Ausdrücken nach den allgemeingültigen Rechengesetzen zu Ergebnissen führen, denen wirkliche Bedeutung zukommt.

§ 140.

1. Unter entgegengesetzten Größen versteht man Größen, die sich auf eine und dieselbe Einheit zurückführen lassen, demnach in arithmetischer Hinsicht gleichartig (§ 135, 2), dabei aber mit gewissen Nebenbestimmungen behaftet sind, von denen die eine der Gegensatz der andern ist. Solche Größen sind z. B. Entfernungen und Bewegungen nach rechts und links, aufwärts und abwärts, vorwärts und rückwärts; oder Gelder, die man einnimmt oder besitzt und ausgiebt oder schuldet. Bei der Anwendung der Arithmetik auf solche Größen hat man sich nun erstens vor Täuschung durch den Sprachausdruck zu hüten. Wenn z. B. gefragt wird: wie viel Thaler hat Jemand im Ganzen, der 6 Thaler Vermögen und 3 Thaler Schulden hat? so scheint es, als würde nach einer Summe gefragt; es bedarf aber nur geringer Ueberlegung, um zu sehen, daß die 6 Thaler mit der Nebenbestimmung Vermögen und die 3 Thaler mit der Nebenbestimmung Schulden nicht addirt werden dürfen, sondern diese 3 Thaler von jenen 6 Thalern subtrahirt werden müssen, um den eigentlichen Besitz an Thalern zu ermitteln. Ferner wird hier öfters nach einem Unterschiede gefragt, während in der That nicht subtrahirt werden darf, sondern addirt werden muß. Fragt man z. B. nach dem Unterschiede der geographischen Breite zweier Orte, von denen der eine 10 Grade nördlich, der andre 5 Grade südlich vom Aequator liegt, so ergiebt sich bei einiger Ueberlegung sofort, daß man jene 10 und diese 5 Grade vielmehr zu addiren hat, um den sogenannten Unterschied zu finden, und daß derselbe $10 + 5 = 15$ Breitengrade überhaupt, d. h. abgesehen von den Nebenbestimmungen nördlich und südlich, beträgt. Oder handelt es sich um den Unterschied der geographischen Länge zweier Orte, von denen der eine 8 Grade östlich, der andre 4 Grade westlich vom ersten Meridian liegt, so sieht man alsbald, daß dieser sogenannte Unterschied $8 + 4 = 12$ Längengrade überhaupt, abgesehen von den Nebenbestimmungen östliche und westliche, betragen muß.

2. Zweitens sind negative Zahlen, die sich bei der Anwendung des Rechnens auf solche Größen ergeben können, folgendermaßen zu beurtheilen (vgl. § 139, 2). Wenn z. B. gefragt wird: um wie viel Linien ist das Quecksilber im Barometer im Ganzen gestiegen, wenn es erst um a Linien gestiegen und dann um b Linien gefallen ist? so sieht man wohl, daß letztere Bewegung der ersteren entgegengesetzt ist, und daß man nicht addiren darf, sondern subtrahiren muß. Geht man nun vom Steigen aus und subtrahirt von den a Linien des Steigens die b Linien des Fallens, so lautet die Antwort allgemein: es ist um $a - b$ Linien gestiegen. Gesetzt aber, es sei $a = 3$, $b = 5$, so wäre hienach das Quecksilber um -2

Linien gestiegen. Dies kann nun offenbar nichts Andres heißen, als daß man in diesem Falle *erstens* in arithmetischer Hinsicht das, was man für den Subtrahenden genommen hat, eigentlich als Minuenden hätte betrachten sollen; *zweitens*, daß hinsichtlich der entgegengesetzten Beschaffenheit der Größen hier keine Rede von *Steigen* des Quecksilbers sein kann; daß dieses vielmehr *im Ganzen nicht gestiegen*, sondern *um 2 Linien gefallen* ist.

§ 141.

1. Sind die Summanden einer Summe gleichbenannter Zahlen oder überhaupt gleichartiger Größen alle einander gleich, so kann man die Summe ein *Vielfaches* eines solchen Summanden nennen; man kann sagen, es sei ein solcher Summand mit der (unbenannten) Zahl, welche angiebt, wie viel Summanden die Summe enthält, *vervielfacht*, *multiplicirt*, und demnach z. B. für aE + aE + aE auch schreiben (aE) . 3 oder 3 . (aE) und ebenso A . 3 oder 3 . A oder 3 A für A + A + A. Weil aber (§ 138, 1) aE + aE + aE auch = (a + a + a)E = (a . 3)E oder (3 . a)E oder (3a)E, so kann man ferner sagen, eine benannte Zahl werde mit einer unbenannten multiplicirt indem man die im *Multiplikanden* (der benannten Zahl) enthaltene Maßzahl mit dem *Multiplikator* (der unbenannten Zahl) multiplicirt und das Produkt als Maßzahl auf die zu Grunde gelegte Einheit bezieht.

2. Wenn öfters auch vom „Multipliciren zweier oder mehrerer benannten Zahlen oder Größen mit einander", von einem „Produkte zweier Linien" u. dgl. die Rede ist, so ist dies ein der Kürze wegen zu entschuldigender, übrigens aber fehlerhafter Sprachgebrauch. In allen solchen Fällen werden nämlich *nur die Maßzahlen* mit einander multiplicirt, und die Einheit, worauf dann dies Produkt zu beziehen ist, muß jedesmal erst noch durch besondre Ueberlegung festgestellt werden, wenn überhaupt, was nicht immer der Fall, eine solche Beziehung stattfindet.

§ 142.

1. Eine benannte Zahl und überhaupt eine Größe kann auf zweierlei Art *dividirt* werden. Der *erste* Fall ist der, daß man aus der benannten Zahl oder Größe, dem *Dividenden*, und aus einer unbenannten Zahl, dem *Divisor*, die benannte Zahl oder Größe zu ermitteln sucht, welche, mit dem Divisor multiplicirt, den Dividenden giebt. Bezeichnet man den Dividenden mit aE oder A, den Divisor mit b, so kann die zu findende benannte Zahl oder Größe, *der bte Theil von aE oder A*, durch $\frac{aE}{b}$ oder $\frac{A}{b}$ ausgedrückt werden, und es ist hienach $\frac{aE}{b} . b = aE$, $\frac{A}{b} . b = A$. Weil aber nach § 141, 1 auch $\left(\frac{a}{b} E\right) . b = \left(\frac{a}{b} . b\right) E = aE$ ist, so muß $\frac{aE}{b} = \frac{a}{b} E$

sein, d. h. eine benannte Zahl wird mit einer unbenannten dividirt indem man die in jener enthaltene Maßzahl mit dieser dividirt und den Quotienten als Maßzahl auf die angenommene Einheit bezieht. Ist dieser Quotient ein echter oder unechter Bruch, so ist die sich ergebende benannte Zahl (vgl. § 136, 2) ein Bruchtheil der Größeneinheit oder die Summe einer ganzen Zahl von Größeneinheiten und eines solchen Bruchtheiles. Und da alle echten Brüche sich immer mehr der Null nähern, je kleiner sie werden, (§ 45, 4), so kann man den in § 139, 1 besprochnen Ausdruck 0 E auch als die Bezeichnung der Gränze betrachten, der sich die Bruchtheile der Größeneinheit desto mehr nähern, je kleiner sie werden.

2. Der zweite Fall ist der, daß man aus einer benannten Zahl oder Größe, dem Dividenden, und einer gleichbenannten Zahl oder gleichartigen Größe, dem Divisor, die unbenannte Zahl zu ermitteln sucht, mit welcher man den Divisor multipliciren muß, um den Dividenden zu erhalten. Bezeichnet man den Dividenden mit aE oder A, den Divisor mit bE oder B, so kann die zu findende unbenannte Zahl, der Quotient, durch $\frac{aE}{bE}$ oder $\frac{A}{B}$ ausgedrückt werden, und es ist hienach $bE \cdot \frac{aE}{bE} = aE$, $B \cdot \frac{A}{B} = A$. Weil aber nach § 141, 1 auch $(bE) \cdot \frac{a}{b} = \left(b \cdot \frac{a}{b}\right)E = aE$ ist, so muß $\frac{aE}{bE} = \frac{a}{b}$ sein, d. h. eine benannte Zahl wird mit einer gleichbenannten dividirt, wenn man die in jener enthaltene Maßzahl mit der in dieser enthaltenen dividirt.

Zweites Kapitel. Verhältnisse und Proportionen.

§ 143.

1. Die Division einer benannten Zahl durch eine gleichbenannte und überhaupt einer Größe durch eine gleichartige (§ 142, 2) wird gewöhnlich als Bestimmung des Verhältnisses der gleichbenannten Zahlen oder gleichartigen Größen zu einander d. h. als Untersuchung, wie oft die zweite, der Divisor, in der ersten, dem Dividenden, enthalten ist, bezeichnet; auch gebraucht man dabei vorzugsweise den Doppelpunkt als Divisionszeichen und nennt einen Ausdruck wie aE : bE oder A : B selbst das Verhältniß von aE zu bE oder von A zu B, spricht demnach, statt aE durch bE oder A durch B, auch, und zwar gewöhnlicher, aE (verhält sich) zu bE, A (verhält sich) zu B; ferner nennt man die beiden gleichbenannten Zahlen oder gleichartigen Größen die Glieder des Verhältnisses, und zwar den Dividenden das Vorderglied, den Divisor das Hinterglied; endlich

nennt man die als Quotient sich ergebende unbenannte Zahl auch den Exponenten des Verhältnisses.

2. Von den Größen und den benannten Zahlen trägt man dann den Ausdruck Verhältniß und was damit zusammenhängt auch auf unbenannte Zahlen über, und zwar zunächst indem man von zwei gleichartigen Größen oder gleichbenannten Zahlen den Satz aufstellt, daß sie sich verhalten wie die entsprechenden Maßzahlen; ein Satz, der in Zeichen durch $aE : bE = a : b$ ausgedrückt werden kann und nichts Andres sagt als daß sich der Quotient bei der Division einer benannten Zahl durch eine gleichbenannte ergiebt indem man die in der ersten enthaltene Maßzahl mit der in der zweiten enthaltenen dividirt (§ 142, 2). Wenn man dann, noch einen Schritt weiter gehend, auch von zwei unbenannten Zahlen sagt, daß sie „sich verhalten" wie zwei andre unbenannte Zahlen oder daß z. B. a zu b gleich c zu d sei, so heißt dies nichts Andres als daß die Quotienten $a : b$ und $c : d$ einander gleich sind.

3. Insofern die Maßzahlen, welche sich bei der Zurückführung zweier gleichartigen Größen auf dieselbe Einheit ergeben, das Verhältniß dieser Größen bestimmen (N. 2), können sie auch die Verhältnißzahlen der Größen heißen, und im weiteren Sinn kann man jedes Paar von Zahlen so nennen, welches denselben Quotienten wie diese Maßzahlen giebt. Da nun jede stetige Größe auf verschiedne Einheiten zurückgeführt werden kann (§ 137, 3); da ferner ein Quotient ungeändert bleibt, wenn man den Dividenden und den Divisor mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt (§ 41), so kann das Verhältniß zweier gegebenen gleichartigen Größen durch unzählige Paare von Verhältnißzahlen ausgedrückt werden.

§ 144.

1. Jede Gleichung zwischen zwei Verhältnissen heißt eine Verhältnißgleichung oder Proportion; die vier Glieder der zwei Verhältnisse sind einander proportionirt. Die Glieder des ersten Verhältnisses nennt man das erste und zweite, die des zweiten das dritte und vierte Glied der Proportion; das erste und dritte Glied, die Vorderglieder der Verhältnisse, heißen gleichnamige Glieder der Proportion, und ebenso das zweite und vierte, die Hinterglieder der Verhältnisse. Von gleichnamigen Gliedern sind zu unterscheiden die gleichbenannten Glieder der Proportion, worunter man die Glieder eines und desselben Verhältnisses in dem Falle versteht, daß alle Glieder der Proportion benannte Zahlen sind, aber die Glieder des einen Verhältnisses sich von denen des andren hinsichtlich der Benennung (Einheit) unterscheiden. Die gleichnamigen Glieder können, weil sie in beiden Verhältnissen dieselbe Stellung einnehmen, auch gleichgestellte oder homologe Glieder der Proportion heißen. Das erste und vierte Glied nennt man die äußeren, das zweite und dritte die inneren Glieder der Proportion.

2. Wenn überhaupt Verhältnißgleichheit zwischen vier Größen stattfindet, d. h. wenn diese Größen überhaupt zu einer Proportion

zusammengestellt werden können, was zum Theil von Beziehungen dieser Größen zu einander abhängt, deren Betrachtung zunächst nicht ins Gebiet der Arithmetik gehört, so sind hiebei zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder nämlich sind diese anderweitigen Wechselbeziehungen der Größen von der Art, daß, wenn die Größe A des ersten Verhältnisses sich vervielfachte, auch die ihr entsprechende Größe B des zweiten Verhältnisses sich entsprechend vervielfachen würde; daß also, wenn z. B. A zu m A würde, auch B zu m B werden würde. Oder die anderweitigen Beziehungen der Größen sind von der Art, daß wenn A sich vervielfachte, B sich nicht vervielfachen würde, sondern entsprechend getheilt werden müßte; daß also, wenn z. B. A zu m A würde, B nicht ebenfalls zu m B werden würde, sondern vielmehr zu $\frac{B}{m}$ werden müßte. Im ersten Falle besteht nun in arithmetischer Hinsicht die Gleichung $mA : A = mB : B$, im zweiten aber die Gleichung $mA : A = B : \frac{B}{m}$. Ist daher C eine mit A, D eine mit B gleichartige Größe, so wird, wenn überhaupt aus diesen vier Größen eine Proportion gebildet werden kann, dieselbe im ersten Falle $C : A = D : B$, im zweiten aber $C : A = B : D$ sein müssen. Die einander entsprechenden Größen A und B, C und D bilden im ersten Falle die gleichnamigen (gleichgestellten, homologen) Glieder der Proportion, im zweiten dagegen bildet das eine Paar die innern, das andre die äußern Glieder derselben. Im ersten Falle sagt man, die vier Größen seien einander direkt oder gerade, im zweiten, sie seien einander indirekt oder umgekehrt proportionirt oder die Glieder des zweiten Verhältnisses verhalten sich umgekehrt wie die des ersten.

§ 145.

1. Da (§ 143, 2) an die Stelle des Verhältnisses zweier gleichartigen Größen oder gleichbenannten Zahlen das Verhältniß der entsprechenden Maßzahlen gesetzt werden kann, so kann auch jede Proportion auf eine solche zurückgeführt werden, deren sämmtliche Glieder unbenannte Zahlen sind, und daher wird nur von Verhältnißgleichungen dieser Art nun weiter die Rede sein.

2. Das Produkt der äußeren Glieder einer jeden Proportion ist gleich dem Produkte der inneren; ist also $a : b = c : d$, so ist auch $ad = bc$.

Denn indem man $a : b$ und $c : d$ mit bd multiplicirt, ergiebt sich einerseits $(a : b) . (bd) = ((a : b) . b) . d = ad$, andrerseits $(c : d) . (bd) = ((c : d) . d) . b = cb = bc$.

3. Jedes äußere Glied einer Proportion ist gleich dem Produkte der inneren Glieder, dividirt durch das andre äußere Glied, und jedes innere Glied ist gleich dem Produkte der äußeren Glieder, dividirt durch das andre innere Glied.

Denn ist $a : b = c : d$, mithin (N. 2) $ad = bc$, so muß auch (§ 50, 1) $\frac{ad}{d} = a = \frac{bc}{d}$, $\frac{ad}{a} = d = \frac{bc}{a}$, $\frac{ad}{c} = \frac{bc}{c} = b$, $\frac{ad}{b} = \frac{bc}{b} = c$ sein.

4. Aus jeder Gleichung zwischen zwei Produkten von je zwei Faktoren kann man vier Verhältnißgleichungen herleiten, indem man die Faktoren des einen Produktes zu äußeren, die des andren zu inneren Gliedern macht.

Denn ist $ab = cd$, so muß auch $\frac{ab}{bc} = \frac{cd}{bc}$ d. h. $a : c = d : b$, ferner $\frac{ab}{bd} = \frac{cd}{bd}$ d. h. $a : d = c : b$, sodann $\frac{ab}{ac} = \frac{cd}{ac}$ d. h. $b : c = d : a$, endlich $\frac{ab}{ad} = \frac{cd}{ad}$ d. h. $b : d = c : a$ sein.

5. Wenn in einer Verhältnißgleichung das Vorderglied eines jeden Verhältnisses zum Hintergliede und das Hinterglied zum Vordergliede gemacht wird, so ergiebt sich wieder eine richtige Verhältnißgleichung.

Denn ist $a : b = c : d$, mithin (N. 2) $ad = bc$, so muß auch $\frac{bd}{ad} = \frac{bd}{bc}$ d. h. $b : a = d : c$ sein.

6. Wenn in einer Verhältnißgleichung die äußeren Glieder oder die inneren Glieder oder sowohl jene als diese umgestellt werden, so daß das erste Glied zum vierten, das zweite zum dritten und umgekehrt wird, so ergiebt sich jedenfalls wieder eine richtige Verhältnißgleichung.

Denn ist $a : b = c : d$, mithin (N. 2) $ad = bc$, so muß auch $\frac{ad}{ab} = \frac{bc}{ab}$ d. h. $d : b = c : a$ und $\frac{ad}{cd} = \frac{bc}{cd}$ d. h. $a : c = b : d$ und $\frac{ad}{ac} = \frac{bc}{ac}$ d. h. $d : c = b : a$ sein.

§ 146.

1. Bei jeder Verhältnißgleichung verhält sich die Summe oder die Differenz der Vorderglieder zur Summe oder zur entsprechenden Differenz der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

Denn ist $a : b = c : d$, so erhellt aus § 47, 1, daß $(a + c) : (b + d) = (a - c) : (b - d) = (c - a) : (d - b) = a : b = c : d$.

2. Mithin verhält sich auch die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder wie die Differenz der ersteren zur Differenz der letzteren, woraus nach § 145, 6 weiter folgt, daß auch $(a + c) : (a - c) = (b + d) : (b - d)$ oder $(c + a) : (c - a) = (d + b) : (d - b)$ ist, d. h. daß auch die Summe der Vorder-

glieder zu ihrer Differenz sich verhält wie die Summe der Hinterglieder zu ihrer Differenz.

3. Die Summe oder die Differenz der Glieder des einen Verhältnisses einer Proportion verhält sich zur Summe oder zur entsprechenden Differenz der Glieder des andren Verhältnisses wie das Vorderglied des einen Verhältnisses zu dem des andren und wie das Hinterglied des ersteren zu dem des letzteren.

Denn ist $a : b = c : d$, so ist (§ 145, 6) auch $a : c = b : d$ und hieraus folgt (N. 1), daß $(a + b) : (c + d) = (a - b) : (c - d) = (b - a) : (d - c) = a : c = b : d$.

4. Mithin verhält sich auch die Summe der Glieder des einen Verhältnisses zur Summe der Glieder des andren Verhältnisses wie die Differenz der ersteren Glieder zur Differenz der letzteren, woraus nach § 145, 6 weiter folgt, daß auch $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$ oder $(b + a) : (b - a) = (d + c) : (d - c)$ ist, d. h. daß die Summe der Glieder des einen Verhältnisses zu ihrer Differenz sich verhält wie die Summe der Glieder des andren Verhältnisses zu ihrer Differenz.

§ 147.

1. Aus § 41 folgt unmittelbar, daß ein Verhältniß ungeändert bleibt, wenn man beide Glieder mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt. Demnach besteht auch jede Verhältnißgleichung ungeändert fort, wenn man die Glieder des einen Verhältnisses mit einer beliebigen Zahl multiplicirt oder dividirt und dabei die Glieder des andren Verhältnisses ungeändert läßt oder mit ebendieser Zahl oder auch mit einer andren multiplicirt oder dividirt.

2. Jede Verhältnißgleichung giebt wieder eine richtige Verhältnißgleichung, wenn man die Vorderglieder oder die Hinterglieder mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt.

Denn ist $a : b = c : d$, so muß auch $(a : b) \,.\, e = (c : d) \,.\, e$, mithin $(a e) : b = a : \frac{b}{e} = (c e) : d = c : \frac{d}{e}$ und $\frac{a : b}{e} = \frac{c : d}{e}$, mithin $\frac{a}{e} : b = a : (b e) = \frac{c}{e} : d = c : (d e)$ sein.

Demnach ergiebt sich überhaupt wieder eine richtige Verhältnißgleichung, wenn man die Vorderglieder oder die Hinterglieder mit einer beliebigen Zahl multiplicirt oder dividirt und dabei beziehungsweise die Hinterglieder oder die Vorderglieder ungeändert läßt oder mit derselben oder auch mit einer andren Zahl multiplicirt oder dividirt.

§ 148.

1. Wenn man das erste, zweite, dritte, vierte Glied einer Verhältnißgleichung beziehungsweise mit dem ersten, zweiten, dritten, vierten Gliede einer andren multiplicirt oder dividirt, so ergiebt sich wieder eine richtige Verhältnißgleichung.

Denn ist $a : b = c : d, e : f = g : h$, so muß auch $(a : b) . (e : f) = (c : d) . (g : h)$, mithin (§ 40, 1) $(a e) : (b f) = (c g) : (d h)$, und $\frac{a : b}{e : f} = \frac{c : d}{g : h}$, mithin (§ 40, 2) $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$ sein.

2. Wenn von zwei oder mehr Verhältnißgleichungen, deren Glieder auf diese Art mit einander multiplicirt werden sollen, jede ein Glied enthält, das auch in der folgenden vorkommt, so kann man die Proportionen nach § 145, 5 und 6 immer so anordnen, daß das gemeinsame Glied, wenn es in der einen erstes oder drittes, zweites oder viertes ist, in der folgenden beziehungsweise zweites oder viertes, erstes oder drittes wird, wodurch nach § 41, 2 und 4 die gemeinsamen Glieder wegfallen. Ist z. B. $a : b = c : d, b : e = f : g$, so ist $(a b) : (b e) = a : e = (c f) : (d g)$. Von einem solchen Verhältnisse, das, wie hier $a : e$, dem Produkte zweier oder mehrerer Verhältnisse gleich ist, sagt man, es sei aus diesen Verhältnissen zusammengesetzt.

§ 149.

1. Wenn man die Glieder einer Verhältnißgleichung mit derselben Zahl potenzirt oder radicirt, so ergiebt sich wieder eine richtige Verhältnißgleichung.

Denn ist $a : b = c : d$, so muß auch $(a : b)^e = (c : d)^e$, mithin $a^e : b^e = c^e : d^e$, und ebenso $\sqrt[e]{a : b} = \sqrt[e]{c : d}$, mithin $\sqrt[e]{a} : \sqrt[e]{b} = \sqrt[e]{c} : \sqrt[e]{d}$ sein (§ 53, 1; 68, 1).

2. Ist $a : b = c : d, b : e = c : d$, so ist (§ 148, 2) $a : e = c^2 : d^2$, und wenn auch $e : f = c : d$, so ist $a : f = c^3 : d^3$ u. s. f. — In solchen Fällen nennt man das zusammengesetzte Verhältniß ein Potenzverhältniß von demjenigen, aus dessen Wiederholungen es zusammengesetzt ist, und zwar das sovielte Potenzverhältniß als der Potenzexponent angiebt; so z. B. ist $a : e$ das zweite Potenzverhältniß oder das quadratische Verhältniß von $c : d$, $a : f$ das dritte Potenzverhältniß oder das kubische Verhältniß u. s. f.

Drittes Kapitel. Zusammengesetzte benannte Zahlen.

§ 150.

1. Zahlen, welche als Maßzahlen mit verschiednen Einheitsnamen zu benannten Zahlen verbunden sind, heißen ungleichbenannte Zahlen (vgl. § 137, 1 und 3). Solche ungleichbenannte Zahlen können dabei immerhin gleichartige Größen, ja sogar dieselbe Größe bezeichnen (§ 137, 3). Wenn sie nun gleichartige Größen be-

zeichnen, kann auch bei ihnen von Addition der einen zur andren, Subtraktion der einen von der andren, Division der einen durch die andre oder von einem Verhältnisse der einen zur andren die Rede sein; außerdem aber nicht.

2. Zwei ungleichbenannte Zahlen lassen sich, wenn die Einheit der einen als ein Inbegriff von Einheiten der andren betrachtet werden kann (§ 135, 4; 136, 2), leicht in gleichbenannte Zahlen verwandeln (vgl. § 137, 3). Will man sie mit Zugrundlegung der kleinern oder niedrigeren d. h. der in der andren Einheit mehrmals enthaltenen Einheit auf gleiche Benennung bringen, so darf man nur die mit der größern oder höhern Einheit verbundne Maßzahl mit der Zahl multipliciren, welche angiebt, wie oft die niedrigere Einheit in der höhern enthalten ist, und dieses Produkt als Maßzahl auf die niedrigere Einheit beziehen. Bezeichnet man z. B. die höhere Einheit mit E, die niedrigere mit M, und ist $E = a\,M$, so ist $b\,E$ als ein Vielfaches von $a\,M$ zu betrachten und man hat (§ 141, 1) $b\,E = (a\,M)\,.\,b = b\,.\,(a\,M) = (a\,.\,b)\,M = (b\,.\,a)\,M$. Umgekehrt hat man, wenn beide Zahlen mit Zugrundlegung der höhern Einheit auf gleiche Benennung gebracht werden sollen, die mit der niedrigern Einheit verbundne Maßzahl mit der Zahl zu dividiren, welche angiebt, wie oft die niedrigere Einheit in der höhern enthalten ist, und dieses Produkt als Maßzahl auf die höhere Einheit zu beziehen. Denn bezeichnet man die höhere Einheit wieder mit E, die niedrigere mit M, und ist $E = a\,M$, so ist, indem man $\frac{c}{a}\,E$ als Vielfaches von $a\,M$ betrachtet, $\frac{c}{a}\,E =$

$$(a\,M)\,.\,\frac{c}{a} = \frac{c}{a}\,.\,(a\,M) = \left(a\,.\,\frac{c}{a}\right)M = \left(\frac{c}{a}\,.\,a\right)M = c\,M.$$

§ 151.

1. Eine Summe ungleichbenannter Zahlen heißt eine **zusammengesetzte benannte Zahl**, wenn ihre verschiednen Einheiten ein **Einheitensystem** bilden d. h. in solcher Beziehung zu einander stehn, daß, wenn man die erste mit der zweiten, diese mit der dritten u. s. f. mißt, alle Maßzahlen ganze Zahlen sind (vgl. § 136, 2); wenn ferner die Summanden **nach den Einheiten geordnet** sind, so daß im schriftlichen Ausdrucke die niedrigste Einheit die erste Stelle rechts, die nächsthöhere Einheit die zweite Stelle nach links hin u. s. f. einnimmt (ähnlich wie im Ziffernsystem die Potenzen der Grundzahl, § 83, 3); wenn endlich jeder Summand kleiner ist als die nächsthöhere Einheit (ebenfalls ähnlich wie im Ziffernsystem die Koefficienten kleiner sein müssen als die Grundzahl, § 85, 1). Die Summanden solcher Summen pflegt man dann auch **ohne das Additionszeichen** bloß neben einander zu schreiben (wiederum ähnlich wie die Ziffern im Ziffernsystem, § 81, 2).

2. Sollen solche zusammengesetzte benannte Zahlen **addirt** oder soll eine von der andren **subtrahirt** werden, so wird dabei zunächst vorausgesetzt, daß ihre Einheiten alle einem und demselben System an-

gehören. Das Verfahren bei der Addition und Subtraktion ist dem bei der Addition und Subtraktion numerisch ausgedrückter unbenannter Zahlen (§ 87 und 88) ähnlich und bedarf, vom gewöhnlichen Rechenunterrichte her bekannt, hier keiner weitern Erörterung; ebenso wenig die Multiplikation einer zusammengesetzten benannten Zahl mit einer unbenannten. Bei der Division sind auch hier die zwei in § 142 besprochnen Fälle zu unterscheiden. Im zweiten Falle, wenn nämlich eine zusammengesetzte benannte Zahl durch eine andre dividirt werden soll, hat man jede vorerst auf eine Einheit (nach § 150, 2) und zwar beide auf dieselbe Einheit zurückzuführen; diese Einheit muß zwar nicht gerade die niedrigste sein, doch ist diese in der Regel die geeignetste.

Viertes Kapitel. Das arithmetische und geometrische Mittel.

§ 152.

1. Den Quotienten der Division einer Summe von zwei oder mehreren gleichartigen Größen, gleichbenannten Zahlen oder unbenannten Zahlen durch die Anzahl der Summanden nennt man das arithmetische Mittel oder den Durchschnittswerth, die Durchschnittszahl.

2. Das arithmetische Mittel der Summe und der Differenz zweier gleichartigen Größen oder unbenannten Zahlen ist der Minuend. Denn es ist $\frac{(a+b)+(a-b)}{2} = \frac{2a}{2} = a$. (Aehnlich ist $\frac{(a+b)-(a-b)}{2}$ $= \frac{2b}{2} = b$.)

3. Das arithmetische Mittel des Quadrates der Summe und des Quadrates der Differenz zweier Zahlen ist die Summe der Quadrate dieser Zahlen. Denn es ist $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, also $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$ und $\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2} = a^2 + b^2$. (Aehnlich ist $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{2}$ $= \frac{4ab}{2} = 2ab$.)

§ 153.

1. Eine Proportion, deren innere Glieder einander gleich sind, nennt man eine stetige; auch spricht man wohl in diesem Falle nur von einem innern oder mittleren Gliede und nennt dasselbe sonst noch die mittlere Proportionalgröße oder Proportionalzahl oder überhaupt die mittlere Proportionale oder auch das geometrische Mittel zwischen oder zu den beiden äußern Gliedern; end-

lich nennt man das vierte Glied der Proportion in diesem Falle auch die dritte Proportionale zum ersten und mittleren Gliede.

2. Die mittlere Proportionale zu zwei (unbenannten) Zahlen ist die Quadratwurzel ihres Produktes. Denn ist $a : b = b : c$, so ist (§ 145, 2) $ac = b^2$ und (§ 80, 1) $\sqrt{ac} = \sqrt{b^2} = b$.

Fünftes Buch.

Erstes Kapitel. Bestimmungsgleichungen überhaupt.

§ 154.

1. Es giebt drei Arten von Gleichungen, nämlich: 1) Gleichungen, in denen auf jeder Seite des Gleichheitszeichens ein und derselbe Ausdruck steht, z. B. $a = a$; solche Gleichungen, deren Richtigkeit unmittelbar einleuchtet, nennt man identische; 2) Gleichungen, welche die Gleichheit verschiedner Verbindungen von Zahlenausdrücken durch die Rechnungsarten aussprechen, z. B. $(a + b) - c = (a - c) + b$; solche Gleichungen nennt man Umformungsgleichungen oder rechnet sie auch zu den identischen Gleichungen im weiteren Sinne, und zu ihnen gehörten die meisten bisher vorgekommenen Gleichungen; hin und wieder kamen aber auch 3) Gleichungen vor, die nicht unbedingt, d. h. für jeden beliebigen Werth der in ihnen enthaltenen einzelnen Ausdrücke, als richtig gelten konnten, wie z. B. $(a + b) - c = (a - c) + b$ für jeden Werth von a, von b und von c gültig ist, sondern die nur bedingungsweise als richtig gelten konnten, wie z. B. $a + c = b + c$ nur unter der Bedingung gilt, daß $a = b$ sei; oder die, als richtig angenommen, folgern ließen, daß es mit gewissen in ihnen enthaltenen Ausdrücken nur eine gewisse Bewandtniß haben könne, wie z. B., wenn wirklich $a + c = b + c$ ist, in Bezug auf a und b daraus folgt, daß $a = b$ sein muß. Gleichungen dieser letztern Art nennt man Bestimmungsgleichungen, eben weil durch sie, wenn sie in der That gültig sind, die Werthe (Bedeutungen) der in ihnen enthaltenen Ausdrücke, soferne sie nicht schon bekannt sind, oder doch die gegenseitigen Beziehungen dieser Werthe bestimmt werden.

2. Angenommen, es sei die Bestimmungsgleichung $x - a = b$ gegeben, so muß, die Richtigkeit derselben vorausgesetzt, $(x - a) + a = b + a$ oder $x = b + a$ sein. Wenn nun die Bedeutung (der Werth) von a und b unzweifelhaft bekannt war und ist, von x aber zuvor nichts weiter bekannt war als eben daß $x - a = b$ sei, so ist jetzt durch die abgeleitete Gleichung $x = b + a$ der unbekannt gewesene Werth von x auf eine Summe bekannter Zahlen zurückgeführt und dadurch bestimmt. Dieses einzige Beispiel zeigt schon, daß es 1) überhaupt möglich ist, arithmetische Ausdrücke, deren Werth vorläufig unbe-

kannt ist, ihrer Bedeutung nach kennen zu lernen, sobald sie mit Ausdrücken von bekanntem Werthe zu Gleichungen verbunden sind, die für richtig gelten können, und 2) daß diese Zurückführung der Werthe unbekannter Ausdrücke auf bekannte Zahlen bewirkt wird indem man die gegebene Bestimmungsgleichung nach den allgemeingültigen Rechengesetzen so umzuformen sucht, daß der seinem Werthe nach unbekannt gewesene Ausdruck zuletzt auf der einen und die Gesammtheit der Ausdrücke von bekanntem Werthe auf der andren Seite der Gleichung steht. Letztere Ausdrücke geben dann in ihrer nunmehrigen Verbindung den Werth der unbekannt gewesenen Zahl an, und setzt man diesen Werth statt des einstweiligen Ausdruckes für dieselbe in die gegebene Bestimmungsgleichung, so muß sich dadurch unmittelbar oder nach einigen Umformungen eine identische Gleichung ergeben, wenn man richtig gerechnet hat. Z. B. wenn $x - a = b$ ist und man hieraus $x = b + a$ gefunden hat, so ergiebt sich indem man $b + a$ statt x in die gegebene Gleichung setzt $(b + a) - a = b$, also unmittelbar eine identische Gleichung $b = b$.

3. Die Lehre von den Bestimmungsgleichungen, insoferne sie zur Ermittlung des unbekannten Werthes gegebener Ausdrücke dienen, heißt mit einem fremden (aus dem Arabischen stammenden) Namen Algebra. Diese Lehre ist natürlich keine besondre Wissenschaft, sondern (so gut wie die im vorigen Buche vorgetragene „allgemeine Größenlehre") nur ein wesentlicher Bestandtheil der allgemeinen Arithmetik. Uebrigens pflegt man die Bestimmungsgleichungen, insoferne sie Gegenstand der Algebra sind, auch algebraische Gleichungen oder schlechthin Gleichungen zu nennen.

§ 155.

1. Zum einstweiligen Ausdrucke der erst noch zu ermittelnden, unbekannten Zahlen, die man kürzer auch bloß die Unbekannten nennt, gebraucht man vorzugsweise die letzten Buchstaben des Alphabets, namentlich x, y, z, während man für bekannte Zahlen, wenn sie nicht in Ziffern, sondern allgemein ausgedrückt werden sollen, die ersten Buchstaben des Alphabets a, b, c . . . vorzugsweise anwendet.

2. Die Auflösung der algebraischen Gleichungen d. h. die Ableitung neuer Gleichungen aus den gegebenen, bis endlich eine Gleichung sich ergiebt, auf deren einer Seite (man pflegt hiezu die linke zu wählen) der einstweilige Ausdruck der Unbekannten und auf deren andren Seite der Werth dieser Unbekannten, durch eine Verbindung von bekannten Zahlen ausgedrückt, sich befindet, kommt im Allgemeinen durch zwei Mittel zu Stande, die auch bisher schon vielfach angewendet wurden, um die Richtigkeit der Umformungsgleichungen zu erweisen, durch welche die allgemeinen Gesetze des Rechnens ausgesprochen werden. Diese zwei Mittel sind: erstens, die Ersetzung eines Ausdruckes durch einen andren, gleichgeltenden oder doch als gleichbedeutend vorausgesetzten; zweitens, die Verbindung eines und desselben Ausdruckes oder gleichbedeutender oder doch als gleichbedeutend vorausgesetzter Ausdrücke mit andren gleichgeltenden oder doch als gleichgeltend angenom-

menen Ausdrücken mittels der verschiednen Rechnungsarten. Wird das erste Mittel so angewendet, daß nur ein einzelner Ausdruck, nicht eine ganze Seite einer Gleichung ersetzt wird, so heißt es vorzugsweise Wertheinsetzung, Substitution; wird aber eine ganze Seite einer Gleichung ersetzt, so nennt man das Verfahren Vergleichung, Komparation. Das zweite Mittel besteht in jedem Falle darin, daß die eine Seite einer Gleichung mit der einen Seite einer zweiten Gleichung durch irgend eine der sechs Rechnungsarten, und die andre Seite der ersten Gleichung mit der andren Seite der zweiten Gleichung durch die nämliche Rechnungsart auf gleiche Weise verbunden wird; dabei kann die eine Gleichung eine identische sein und jede Seite derselben nur aus einem einzigen einfachen Ausdrucke bestehn; mag sie nun aber diese Beschaffenheit haben oder nicht, so bezeichnet man diese Art der Ableitung einer dritten Gleichung aus zwei andern als Kombination, Verbindung.

3. Die obersten Grundsätze, nach welchen bei der Auflösung der algebraischen Gleichungen verfahren wird, sind also keine andern als

1) daß jeder Ausdruck, der einem andren gleich ist, an die Stelle desselben gesetzt werden kann (§ 5, 4) und
2) daß Gleiches mit Gleichem durch die nämliche Rechnungsart auf gleiche Weise verbunden wieder Gleiches geben muß.

Nach Verschiedenheit der Rechnungsarten umfaßt der letztere allgemeine Grundsatz mehrere besondre Grundsätze, die schon in § 10; 19; 31; 50; 65; 80 ausgesprochen worden sind.

§ 156.

1. Der Ausdruck Glieder wird bei algebraischen Gleichungen nur in dem Sinne genommen, in welchem man von Gliedern einer gleichartigen oder gemischten Summe spricht, nicht auch in dem Sinne, in welchem er bei Verhältnissen und Proportionen gebraucht wird. Z. B. in der Gleichung $x - a = b$ besteht die linke Seite aus zwei Gliedern, x und a; dagegen wird in $\frac{a}{x} = b$ der Quotient $\frac{a}{x}$ als ein einziges Glied betrachtet. Zu unterscheiden von den Gliedern sind die Elemente einer Gleichung, wie man bisweilen die einzelnen in ihr vorkommenden Zahlenausdrücke nennt; so z. B. enthält die Gleichung $(a - b)x + c = d$ so wie sie gegeben ist drei Glieder, $(a - b)x$ und c und d, aber fünf Elemente, a, b, x, c, d.

2. Eine algebraische Gleichung, worin nur eine Unbekannte vorkommt, heißt geordnet, sobald ihre linke Seite einen nach fallenden Potenzen der Unbekannten geordneten Ausdruck darstellt, so daß 1) bloß eigentliche Potenzen, einschließlich der ersten, vorkommen und 2) alle Glieder, welche eine und dieselbe Potenz enthalten, zu einem Gliede vereinigt sind; während auf der rechten Seite alle Glieder, welche die Unbekannte nicht enthalten, zu einem Gesammtausdrucke, den man kurz das bekannte Glied nennt, vereinigt sind. Je nachdem dann die höchste vorkommende Potenz der Unbekannten die erste oder

zweite oder dritte u. s. f. ist, nennt man die Gleichung eine Gleichung vom ersten, zweiten, dritten Grade u. s. f. Uebersteigt die höchste Potenz der Unbekannten den zweiten Grad, so nennt man die Gleichung überhaupt eine höhere. Die Gleichungen vom zweiten Grade heißen auch quadratische, die vom dritten kubische, die vom vierten biquadratische.

3. Die allgemeine Form einer geordneten Gleichung vom ersten Grad ist hienach $ax = b$, einer vom zweiten Grad $ax^2 + bx = c$, einer vom dritten $ax^3 + bx^2 + cx = d$, einer vom vierten $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = e$. Die hier gebrauchten Ausdrücke a, b, c, d, e können mannigfaltige (positive und negative, ganze und gebrochne u. s. w.) Werthe haben; man nennt sie die Koefficienten der Gleichung. Kommen alle Potenzen der Unbekannten von der höchsten an bis herab zur ersten in der Gleichung vor, so heißt sie eine vollständige; fehlt aber eine oder die andre niedrigere Potenz, so heißt die Gleichung eine unvollständige. Den letzteren Fall kann man so betrachten als sei der Koefficient der fehlenden Potenz = 0; so z. B. kann man $ax^2 = c$ betrachten als $ax^2 + 0x = c$, $ax^3 + cx = d$ als $ax^3 + 0x^2 + cx = d$ u. s. f. Kommt eine höhere als die erste Potenz der Unbekannten allein vor, sind also die Koefficienten aller niedrigeren Potenzen = 0, so heißt eine solche unvollständige Gleichung eine reine Gleichung von dem durch den Potenzexponenten angezeigten Grade, z. B. eine reine kubische Gleichung, wenn sie die Form $ax^3 = d$ hat, was soviel als $ax^3 + 0x^2 + 0x = d$ ist. Im Gegensatze hievon heißen alle Gleichungen, in denen verschiedne Potenzen der Unbekannten vorkommen, unreine oder gemischte, mögen sie nun vollständig oder unvollständig sein.

4. Bisweilen nimmt auch das bekannte Glied einer Gleichung den Werth = 0 an. Wäre in diesem Falle die Gleichung vom ersten Grade, so würde aus $ax = 0$ nur folgen, daß $x = 0$, da der Koefficient a in jedem Falle als nicht = 0 vorausgesetzt wird. Ist aber die Gleichung eine höhere als vom ersten Grad, so kann zwar x ebenfalls = 0 sein, dies ist dann aber nicht sein einziger Werth, sondern man kann auf beiden Seiten der Gleichung mit x dividiren und hiedurch ergiebt sich aus $ax^2 + bx = 0$ die Gleichung $ax + b = 0$ oder $(ax + b) - b = 0 - b$ d. h. $ax = -b$, aus $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ oder $ax^2 + bx = -c$; allgemein kommt in einem solchen Falle die Gleichung auf eine um einen Grad niedrigere zurück, woraus man für x noch einen oder mehrere andre Werthe als 0 erhält.

5. Eine Gleichung, die mehr als eine Unbekannte enthält, heißt geordnet, wenn sie in Bezug auf jede in ihr vorkommende Unbekannte nach N. 2 geordnet ist, so daß auch alle Glieder, welche dasselbe Produkt zweier oder mehrerer Unbekannten enthalten, zu einem Gliede vereinigt sind. Dabei heißen nicht bloß die Glieder, welche eine Potenz einer Unbekannten enthalten, Glieder vom sovielten Grade als der Potenzexponent angiebt, sondern es gelten auch alle Glieder, die ein Produkt von zwei oder mehreren Unbekannten enthalten,

für Glieder vom sovielten Grade als die Summe der Potenzexponenten der Unbekannten angiebt; so z. B. heißt axy ($= ax^1y^1$) ein Glied vom ($1 + 1 =$) 2ten Grade, bx^2y ($= bx^2y^1$) ein Glied vom ($2 + 1 =$) 3ten Grade, $cxyz$ ($= cx^1y^1z^1$) ebenfalls ein Glied vom ($1 + 1 + 1 =$) 3ten Grade u. s. w. In der geordneten Gleichung müssen nun alle Glieder eines höheren Grades denen von niedrigeren Graden, und die Glieder, welche bloß Potenzen einer Unbekannten enthalten, den gleichgradigen Gliedern, welche Produkte mehrerer Unbekannten enthalten, vorausgehn.

6. Eine Gleichung mit mehr als einer Unbekannten heißt eine vollständige, wenn sie alle Glieder enthält, die nach Nr. 3 und 5 in ihr vorkommen können, vom höchsten Grade an bis herab zum ersten. So ist z. B. $ax + by = c$ eine geordnete vollständige Gleichung vom ersten Grade mit zwei Unbekannten, $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz = l$ eine solche vom zweiten Grade mit drei Unbekannten, $ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 + ex^2 + fy^2 + gxy + hx + ky = l$ eine solche vom dritten Grade mit zwei Unekannten u. s. f. Fehlt ein oder das andre Glied, so heißt die Gleichung eine unvollständige vom Grade desjenigen Gliedes, dessen Grad der höchste überhaupt vorkommende ist.

§ 157.

1. Das Ordnen einer algebraischen Gleichung muß immer der erste Schritt zu ihrer Auflösung sein, da man häufig erst wenn die Gleichung geordnet ist ihren Grad erkennt und hienach das weitere Verfahren einrichten kann. Einige besondre Rücksichten, die man dabei zu beobachten hat, sind folgende. Wenn die Gleichung wie sie gegeben ist bloß eigentliche Potenzen der Unbekannten, einschließlich der ersten Potenz, enthält und mit diesen Potenzen in den Gliedern der Gleichung, wo sie vorkommen, bekannte Zahlen bloß als Faktoren oder Divisoren verbunden sind, so hat man zunächst nur alle diese Glieder auf die linke, und alle Glieder, welche die Unbekannte nicht enthalten, auf die rechte Seite zu bringen. Zu dem Ende kombinirt man, wenn z. B. die Gleichung $ax - b + \frac{x^3}{c} = dx^2 + e$ gegeben ist, mit derselben die identische Gleichung $b - dx^2 = b - dx^2$, welche alle von der einen auf die andre Seite zu schaffenden Glieder, aber mit veränderten Vorzeichen enthält, durch Addition; dadurch ergiebt sich zunächst $ax + \frac{x^3}{c} - dx^2 = e + b$ und hieraus sofort die geordnete Gleichung

$$\frac{x^3}{c} - dx^2 + ax = e + b.$$

2. Wenn aber die gegebene Gleichung zwar bloß eigentliche Potenzen der Unbekannten, einschließlich der ersten, enthält, jedoch mit diesen Potenzen in den Gliedern, wo sie vorkommen, bekannte Zahlen auch durch Addition oder Subtraktion verbunden sind, so muß man zuerst diese Verbindungen zu einzelnen Gliedern entwickeln und

dann weiter nach N. 1 verfahren. Hat man z. B. die Gleichung $\frac{a+x^2}{b} - c - (d-x)e = fx^2 - \frac{x^3}{g} + h$ vorliegen, so wird man sie zuerst in $\frac{a}{b} + \frac{x^2}{b} - c - de + ex = fx^2 - \frac{x^3}{g} + h$ umformen, dann mit ihr die identische Gleichung $-\frac{a}{b} + c + de - fx^2 + \frac{x^3}{g} = -\frac{a}{b} + c + de - fx^2 + \frac{x^3}{g}$ durch Addition kombiniren, wodurch man $\frac{x^2}{b} + ex - fx^2 + \frac{x^3}{g} = h - \frac{a}{b} + c + de$ und hieraus die geordnete Gleichung $\frac{x^3}{g} + \left(\frac{1}{b} - f\right)x^2 + ex = h - \frac{a}{b} + c + de$ erhält.

3. Wenn die Gleichung wie sie gegeben ist auch Potenzen mit negativen Exponenten enthält, oder, mit andren Worten, wenn die Unbekannte auch als Divisor vorkommt, so hat man vor allem diesen Divisor in einen Faktor umzuwandeln und dann weiter nach dem Vorigen zu verfahren. Zu dem Ende wird man, wenn z. B. die Gleichung $\frac{a}{x} - b + cx^2 = dx - e$ gegeben ist, mit ihr die identische Gleichung $x = x$ durch Multiplikation kombiniren; dadurch erhält man $a - bx + cx^3 = dx^2 - ex$ und hieraus nach N. 1 $-bx + cx^3 - dx^2 + ex = -a$ und endlich $cx^3 - dx^2 - (b-e)x = -a$.

4. Wenn die Gleichung wie sie gegeben ist auch Potenzen mit gebrochnen Exponenten enthält, oder, mit andren Worten, wenn die Unbekannte unter dem Wurzelzeichen, als Radikand, vorkommt (solche Gleichungen nennt man auch wohl irrationale und dagegen die in N. 1—3 besprochnen rationale), so muß man vor allem die Unbekannte vom Wurzelzeichen zu befreien suchen. Dies gelingt aber nicht immer, sondern mit Gewißheit nur in zwei Fällen. Der erste Fall ist, wenn bloß ein solcher Wurzelausdruck in der Gleichung vorkommt. Ist z. B. die Gleichung $\sqrt[3]{a+x} - bx^2 = cx + d$ gegeben, so formt man sie zuerst so um, daß das Glied mit dem Wurzelzeichen allein auf der einen Seite steht und alle übrigen Glieder auf der andren Seite stehn, was man erreicht indem man mit ihr die identische Gleichung $bx^2 = bx^2$ addirend kombinirt; indem man ferner mit der sich hiedurch ergebenden Gleichung $\sqrt[3]{a+x} = cx + d + bx^2$ die identische Gleichung $3 = 3$ potenzirend kombinirt, ergiebt sich $a + x = (cx + d + bx^2)^3$; die Potenz auf der rechten Seite wird nun gehörig entwickelt und endlich die ganze Gleichung nach dem Bisherigen geordnet. Der zweite Fall ist, wenn zwar mehr als ein die Unbekannte enthaltender Wurzel

ausdruck in der Gleichung vorkommt, aber alle diese Wurzeln nur vom zweiten Grade sind; nur muß in diesem Falle das eben gezeigte Verfahren mehrmals nach einander angewendet werden.

Zweites Kapitel. Gleichungen des ersten Grades.

§ 158.

1. Wenn eine einzelne Gleichung des ersten Grades vorliegt, so bedarf es, sobald sie geordnet ist, zu ihrer völligen Auflösung nur noch der Division ihrer beiden Seiten mit dem Koefficienten der Unbekannten; aus $ax = b$ ergiebt sich sofort $x = \frac{b}{a}$.

2. Wenn aber gleichzeitig mehrere Gleichungen ersten Grades von der Art vorgelegt sind, daß eine und dieselbe Unbekannte in mehr als einer Gleichung vorkommt und eine und dieselbe Gleichung mehr als eine Unbekannte enthält, so bedarf es zur Auflösung solcher zusammengehörigen Gleichungen oder eines solchen Systems von Gleichungen mit mehreren Unbekannten erst noch des Sonderns der Unbekannten von einander.

3. Die Unbekannten von einander sondern heißt aber: aus den gegebenen Gleichungen ebenso viele Gleichungen, von denen jede nur noch eine Unbekannte enthält, herleiten, indem man alle übrigen Unbekannten wegschafft, eliminirt. Diese Wegschaffung, Elimination, geschieht durch die schon in § 155, 2 genannten Mittel. Durch Substitution können alle Unbekannten bis auf eine beseitigt werden indem man eine von den Gleichungen nach dieser Unbekannten auflöst d. h. den Werth dieser Unbekannten durch die in der Gleichung vorkommenden bekannten Zahlen in Verbindung mit den übrigen Unbekannten, als wären diese ebenfalls bekannt, ausdrückt und diesen Werth in die übrigen Gleichungen, wo diese Unbekannte noch vorkommt, einsetzt; dadurch enthalten diese übrigen Gleichungen eine Unbekannte weniger als zuvor, und indem man mit ihnen dasselbe Verfahren hinsichtlich einer andern Unbekannten wiederholt u. s. f., kann man endlich zu einer Gleichung gelangen, die nur noch eine Unbekannte enthält, deren Werth durch lauter bekannte Zahlen ausgedrückt ist. Mittels Einsetzung dieses Werthes in eine vorausgehende Gleichung, die außerdem nur noch eine zweite Unbekannte enthält, findet man den Werth dieser zweiten Unbekannten; setzt man die beiden gefundnen Werthe in eine vorausgehende Gleichung, die außerdem nur noch eine dritte Unbekannte enthält, so findet man auch den Werth von dieser u. s. f.

4. Durch Komparation kann man alle Unbekannten bis auf eine entfernen indem man alle Gleichungen, worin eine und dieselbe Unbekannte vorkommt, nach dieser auflöst und einen von den gefundnen Werthen allen übrigen gleichsetzt; dadurch erhält man eine Gleichung

weniger, und alle diese abgeleiteten Gleichungen und die übrigen gegebenen Gleichungen enthalten nun auch eine Unbekannte weniger, und durch Wiederholung dieses Verfahrens bezüglich der übrigen Unbekannten kann man endlich zu einer Gleichung gelangen, die nur noch eine Unbekannte enthält. Die Werthe der übrigen Unbekannten kann man dann nach N. 3 finden.

5. Diesen beiden in allen Fällen anwendbaren Eliminationsmethoden ist jedoch da, wo es anwendbar ist, das Kombinationsverfahren vorzuziehen. Dieses beruht im Allgemeinen darauf, daß man einer aus zwei oder mehreren Gleichungen wegzuschaffenden Unbekannten in jeder von diesen Gleichungen einen solchen Koefficienten zu geben sucht, daß, wenn man die Gleichungen nach Umständen durch Addition oder Subtraktion kombinirt, die kombinirten Koefficienten der wegzuschaffenden Unbekannten = 0 werden. Diesen Zweck kann man auf verschiedne Art erreichen.

§ 159.

1. Um z. B. aus zwei zusammengehörigen vollständigen Gleichungen des ersten Grades mit zwei Unbekannten $a_1x + b_1y = c_1$ und $a_2x + b_2y = c_2$ zunächst den Werth von x zu bestimmen, kann man die erste Gleichung mit b_2, die zweite mit b_1 multipliciren; dadurch erhält man $a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2$ und $a_2b_1x + b_2b_1y = b_2b_1$, und indem man diese Gleichungen durch Subtraktion kombinirt, ergiebt sich $(a_1b_2 - a_2b_1)x + (b_1b_2 - b_2b_1)y = c_1b_2 - c_2b_1$ d. h. $(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$, also (§ 158, 1) $x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$. (Haben die Glieder, in denen y vorkommt, verschiedne Vorzeichen, so addirt man, statt zu subtrahiren.) Multiplicirt man ferner die erste Gleichung mit a_2, die zweite mit a_1, so ergiebt sich $a_1a_2x + b_1a_2y = c_1a_2$ und $a_2a_1x + b_2a_1y = c_2a_1$ und hieraus $(a_1a_2 - a_2a_1)x + (b_1a_2 - b_2a_1)y = c_1a_2 - c_2a_1$ d. h. $(b_1a_2 - b_2a_1)y = c_1a_2 - c_2a_1$, also $y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{b_1a_2 - b_2a_1}$.

2. Multiplicirt man die Gleichung $a_1x + b_1y = c_1$ mit einer Zahl n, deren Werth vorläufig unbestimmt bleibt, so ergiebt sich $a_1nx + b_1ny = c_1n$, und indem man hiemit die Gleichung $a_2x + b_2y = c_2$ addirend kombinirt erhält man $(a_1n + a_2)x + (b_1n + b_2)y = c_1n + c_2$. Soll nun y eliminirt werden, so muß $b_1n + b_2 = 0$ angenommen werden; hieraus ergiebt sich aber für n der Werth $\frac{-b_2}{b_1}$. Durch Einsetzung dieses Werthes in die kombinirte Gleichung ergiebt sich ferner $\left(a_1 \cdot \frac{-b_2}{b_1} + a_2\right)x = c_1 \cdot \frac{-b_2}{b_1} + c_2$ und hieraus $(-a_1b_2 + a_2b_1)x = -c_1b_2 + c_2b_1$, also $x = \frac{-(c_1b_2 - c_2b_1)}{-(a_1b_2 - a_2b_1)}$

$= \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$, wie in N. 1. Soll dagegen x eliminirt werden, so muß man $a_1 n + a_2 = o$ annehmen; hieraus folgt für n der Werth $\frac{-a_2}{a_1}$ und durch Substitution desselben erhält man $\left(b_1 . \frac{-a_2}{a_1} + b_2\right) y = c_1 . \frac{-a_2}{a_1} + c_2$ und weiter $(-b_1 a_2 + b_2 a_1) y = -c_1 a_2 + c_2 a_1$, somit $y = \frac{-(c_1 a_2 - c_2 a)}{-(b_1 a_2 - b_2 a_1)} = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1}$, wie in N. 1.

3. Der für y in N. 1 und 2 gefundne Werth $\frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1}$ ist $= \frac{-(c_2 a_1 - c_1 a_2)}{-(b_2 a_1 - b_1 a_2)} = \frac{c_2 a_1 - c_1 a_2}{b\ a_1 - b_1 a_2}$, und in dieser Form hat er denselben Divisor wie der für x gefundne Quotient. Die Dividenden beider Quotienten ergeben sich aber aus dem gemeinsamen Divisor, wenn man in diesem einmal die Koefficienten a_1 und a_2 von x, das andremal die Koefficienten b_1 und b_2 von y durch die bekannten Glieder c_1 und c_2 ersetzt.

4. Sollen die gegebenen Gleichungen wirklich zusammengehören und zur Auffindung bestimmter Werthe sowohl für x als für y geeignet sein, so darf weder von den drei Differenzen $a_1 b_2 - a_2 b_1$ (oder $b_2 a_1 - b_1 a_2$), $c_1 b_2 - c_2 b_1$, $c_2 a_1 - c_1 a_2$ eine allein, noch dürfen zwei von diesen Differenzen zugleich Null sein. Denn wäre 1) $c_1 b_2 - c_2 b_1 = o$, ohne daß auch eine der beiden andren Differenzen $= o$ wäre, und hätte man demnach $c_1 b_2 = c_2 b_1$ oder (§ 145, 4) $c_1 : c_2 = b_1 : b_2$, ohne daß auch $c_1 : c_2 = b_1 : b_2 = a_1 : a_2$ wäre, so würde, wenn man $c_1 = c_2 d$, somit $b_1 = b_2 d$ setzte, nicht auch $a_1 = a_2 d$, sondern $a_1 = a_2 d \pm e$ sein; die erste Gleichung wäre folglich $(a_2 d \pm e) x + b_2 d y = c_2 d$ oder $\left(a_2 \pm \frac{e}{d}\right) x + b_2 y = c_2$ und die zweite $a_2 x + b_2 y = c_2$; die beiden Gleichungen würden also, da $a_2 \pm \frac{e}{d}$ nicht $= a_2$ sein kann, einander widersprechen. Ganz derselbe Fall träte ein, wenn $c_2 a_1 - c_1 a_2$ für sich allein $= o$ wäre. Wenn aber 2) $a_1 b_2 - a_2 b_1$ allein $= o$ wäre, so würden die Werthe für x und y die Form $\frac{n}{o} = \infty$ annehmen; die Gleichungen aber würden einander auch in diesem Falle widersprechen; denn aus $a_1 b_2 = a_2 b_1$ oder $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ würde, da nicht auch $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2$ wäre, nothwendig folgen, daß, wenn $a_1 = a_2 d$, $b_1 = b_2 d$ wäre, nicht auch $c_1 = c_2 d$ sein könnte, sondern $c_1 = c_2 d \pm e$ sein müßte; die erste Gleichung wäre also $a_2 d x + b_2 d y = c_2 d \pm e$ oder $a_2 x + b_2 y = c_2 \pm \frac{e}{d}$, die zweite dagegen $a_2 x + b_2 y = c_2$. Wenn ferner 3) $c_1 b_2 - c_2 b_1 = o$ und zugleich $c_2 a_1 - c_1 a_2 = o$ wäre, in welchem Falle sich sowohl

für x als für y scheinbar der Werth o ergäbe, so würde hieraus vielmehr folgen $c_1 : c_2 = b_1 : b_2 = a_1 : a_2$ d. h. es müßte auch $a_1b_2 = a_2b_1$ oder $a_1b_2 - a_2b_1 = o$ sein; die Werthe für x und y würden also die unbestimmte Form $\frac{o}{o}$ annehmen; die zwei Gleichungen aber kämen auf eine einzige zurück; denn wenn $c_1 = c_2d$, $b_1 = b_2d$, $a_1 = a_2d$ wäre, so würde die erste Gleichung $a_2dx + b_2dy = c_2d$ oder $a_2x + b_2y = c_2$, also von der zweiten nicht verschieden sein. Ganz derselbe Fall träte ein, wenn sich zunächst nur $c_1b_2 - c_2b_1$ und $a_1b_2 - a_2b_1$ oder $c_2a_1 - c_1a_2$ und $a_1b_2 - a_2b_1$ als $= o$ darstellte, d. h. es würde hieraus unmittelbar folgen, daß bezüglich $c_2a_1 - c_1a_2$ oder $c_1b_2 - c_2b_1$ auch $= o$ sein müßte u. s. w.

§ 160.

1. Von drei zusammengehörigen vollständigen Gleichungen des ersten Grades mit drei Unbekannten $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$, $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ kann man die erste mit einer Zahl n_1 von vorläufig unbestimmtem Werthe multipliciren und die zweite mit einer solchen Zahl n_2 und hierauf die drei Gleichungen addirend kombiniren, wodurch sich $(a_1n_1 + a_2n_2 + a_3)\,x + (b_1n_1 + b_2n_2 + b_3)\,y + (c_1n_1 + c_2n_2 + c_3)\,z = d_1n_1 + d_2n_2 + d_3$ ergiebt. Soll nun, um den Werth von x zu bestimmen, y und z eliminirt werden, so ist $b_1n_1 + b_2n_2 + b_3 = c_1n_1 + c_2n_2 + c_3 = o$ anzunehmen oder $b_1n_1 + b_2n_2 = - b_3$, $c_1n_1 + c_2n_2 = - c_3$, und hieraus ergeben sich nach § 159 für n_1 und n_2 die Werthe $\frac{b_2c_3 - b_3c_2}{b_1c_2 - c_1b_2}$ und $\frac{b_3c_1 - b_1c_3}{b_1c_2 - c_1b_2}$. Durch Einsetzung dieser Werthe erhält man weiter $\left(a_1 \cdot \frac{b_2c_3 - b_3c_2}{b_1c_2 - c_1b_2} + a_2 \cdot \frac{b_3c_1 - b_1c_3}{b_1c_2 - c_1b_2} + a_3\right) x = d_1 \cdot \frac{b_2c_3 - b_3c_2}{b_1c_2 - c_1b_2} + d_2 \cdot \frac{b_3c_1 - b_1c_3}{b_1c_2 - c_1b_2} + d_3$ oder $(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1)\,x = d_1b_2c_3 - d_1b_3c_2 + d_2b_3c_1 - d_2b_1c_3 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1$, mithin $x = \frac{d_1b_2c_3 - d_1b_3c_2 + d_2b_3c_1 - d_2b_1c_3 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}$. Für y ergiebt sich, indem man $a_1n_1 + a_2n_2 + a_3 = c_1n_1 + c_2n_2 + c_3 = o$ setzt u. s. w., der Werth $\frac{a_1d_2c_3 - a_1d_3c_2 + a_2d_3c_1 - a_2d_1c_3 + a_3d_1c_2 - a_3d_2c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}$, und für z, indem man $a_1n_1 + a_2n_2 + a_3 = b_1n_1 + b_2n_2 + b_3 = o$ setzt u. s. w., der Werth $\frac{a_1b_2d_3 - a_1b_3d_2 + a_2b_3d_1 - a_2b_1d_3 + a_3b_1d_2 - a_3b_2d_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}$.

2. Wenn von drei Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten zwei vollständig sind, die dritte aber in der Art unvollständig, daß sie nur zwei Unbekannte enthält; wenn also die Gleichungen die Form $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$, $a_3x + b_3y = d_3$ haben, so kann man z aus der ersten und zweiten Gleichung

durch ein Verfahren, das dem in § 159, 1 gelehrten ganz ähnlich ist, eliminiren; alsdann bilden die kombinirte erste und zweite Gleichung, nämlich $(a_1c_2 - a_2c_1)x + (b_1c_2 - b_2c_1)y = d_1c_2 - d_2c_1$, und die dritte ein System vollständiger Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten, welches nach § 159, 1 oder 2 behandelt werden kann; setzt man endlich die hieraus erhaltenen Werthe von x und y in die erste oder zweite gegebene Gleichung ein, so ergiebt sich der Werth von z.

3. Wenn von drei Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten eine vollständig ist und zwei dadurch unvollständig sind, daß in ihnen eine und dieselbe Unbekannte fehlt; wenn also die Gleichungen die Form $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $a_2x + b_2y = d_2$, $a_3x + b_3y = d_3$ haben, so kann man zuerst die zwei letzteren Gleichungen nach § 159, 1 oder 2 behandeln; setzt man dann die Werthe für x und y in die erste Gleichung, so ergiebt sich aus dieser der von z.

4. Wenn von drei Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten jede dadurch unvollständig ist, daß in ihr eine der drei Unbekannten fehlt, und zwar in jeder Gleichung eine andre Unbekannte fehlt; wenn also die Gleichungen die Form $a_1x + b_1y = d_1$, $a_2x + c_2z = d_2$, $b_3y + c_3z = d_3$ haben, so kann man aus zweien von den Gleichungen die in beiden vorkommende Unbekannte nach § 159, 1 eliminiren; dann bilden die kombinirte Gleichung und die dritte gegebene ein System, das nach § 159, 1 oder 2 behandelt werden kann; setzt man endlich den einen oder den andren der hieraus gefundnen Werthe zweier Unbekannten in eine oder die andre der beiden andren gegebenen Gleichungen ein, so erhält man den Werth der dritten Unbekannten.

Drittes Kapitel. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades.

§ 161.

1. Wenn mehr als eine Unbekannte zu bestimmen ist, so sind hiezu im Allgemeinen gerade so viele von einander unabhängige d. h. nicht auf eine und dieselbe Gleichung zurückkommende Gleichungen erforderlich als Unbekannte zu bestimmen sind. Hat man weniger Gleichungen als Unbekannte, so sind diese Gleichungen zur vollständigen Bestimmung der Unbekannten unzulänglich, d. h. man kann zwar für jede Unbekannte einen Werth daraus ableiten, dieser ist aber nicht bloß in bekannten, sondern zum Theil auch in unbekannten Elementen ausgedrückt. Ist z. B. für zwei Unbekannte x und y nur eine Gleichung $ax + by = c$ gegeben, so erhält man hieraus zwar $x = \frac{c - by}{a}$, $y = \frac{c - ax}{b}$, aber x und y sind dadurch nicht völlig bestimmt. (Vgl. § 159, 4.)

2. Solche zur vollständigen Bestimmung der Unbekannten unzulängliche Gleichungen nennt man gewöhnlich selbst unbestimmte

Gleichungen, wiewohl sie, die Gleichungen, selbst keineswegs unbestimmt sind. Aber auch die Unbekannten bleiben nicht in allen Fällen unbestimmt; sondern es können mit den Gleichungen gewisse Bedingungen verbunden sein, denen zufolge für jede Unbekannte nur eine beschränkte Anzahl bestimmter Werthe, ja vielleicht nur ein einziger Werth angenommen werden kann, wenn überhaupt unter diesen Bedingungen eine Auflösung der Gleichungen möglich ist. Eine solche Bedingung kann sein, daß die Werthe der Unbekannten bloß eigentliche (positive, ganze, rationale) Zahlen sein sollen.

3. Wenn in diesem Falle für zwei Unbekannte eine einzige Gleichung des ersten Grades $ax \pm by = c$ gegeben ist, so kann man zur Bestimmung der Unbekannten, so weit sie möglich ist, auf verschiedne Art verfahren, wobei aber in jedem Falle vorausgesetzt wird: 1) daß auch a, b, c eigentliche Zahlen sind; 2) daß a, b, c keinen Gemeintheiler mehr haben, sondern, wenn sie einen hatten, durch Division damit theilerfremd gemacht sind; 3) daß auch a und b theilerfremd sind, weil sonst, wenn ihr Gemeintheiler mit d bezeichnet wird, $\frac{a}{d}x \pm \frac{b}{d}y = \frac{c}{d}$ d. h. eine Summe oder Differenz ganzer Zahlen einem Bruche gleich sein müßte.

4. Hat man nun z. B. die Gleichung $105x - 43y = 17$, so ergiebt sich zunächst für die mit dem kleineren Koefficienten behaftete Unbekannte y der Werth $2x + \frac{19x - 17}{43}$. Sollen x und y eigentliche Zahlen sein, so muß auch $\frac{19x - 17}{43}$ eine solche sein; setzt man diesen Ausdruck $= z$, so folgt daraus $x = 2z + \frac{5z + 17}{19}$, wobei $\frac{5z + 17}{19}$ wieder eine eigentliche Zahl sein muß; setzt man dafür w, so folgt $z = 3w + \frac{4w - 17}{5}$, wobei $\frac{4w - 17}{5}$ wieder eine eigentliche Zahl sein muß; setzt man dafür v, so ergiebt sich $w = v + \frac{v + 17}{4}$, und indem man $\frac{v + 17}{4}$, was wieder eine eigentliche Zahl sein muß, $= u$ setzt, erhält man endlich $v = 4u - 17$. Durch Wertheinsetzung ergiebt sich dann aber $w = 5u - 17$, $z = 19u - 68$, $x = 43u - 153$, $y = 105u - 374$. Man kann nun für u nach und nach alle eigentlichen Zahlen setzen, von der kleinsten an, für welche die Differenzen $43u - 153$ und $105u - 374$ positiv sind, nämlich von 4 an, und erhält dadurch folgende Reihe zusammengehöriger Werthe:

$$\left.\begin{array}{l} u = 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10 \\ x = 19,\ 62,\ 105,\ 148,\ 191,\ 234,\ 277 \\ y = 46,\ 151,\ 256,\ 361,\ 466,\ 571,\ 676 \end{array}\right\} \text{u. s. w.}$$

Jedes von diesen Werthepaaren für x und y macht die Gleichung $105x - 43y = 17$ zu einer identischen; so ist z. B. $105 . 148 - 43 . 361 = 15540 - 15523 = 17$; die Gleichung hat also unendlich viele Auflösungen. Dies findet jedoch bei solchen Gleichungen nur dann statt, wenn sie, wie dieses Beispiel, die Form $ax - by = c$ haben; hat dagegen die Gleichung die Form $ax + by = c$, so ist jedenfalls nur eine beschränkte Zahl von Auflösungen möglich; ja es kann sein, daß die Gleichung nur eine Auflösung zuläßt oder (wenn die Unbekannten eigentliche Zahlen sein sollen) ganz unauflösbar ist, vgl. N. 2.

5. Ein andres Verfahren zur Auflösung solcher Gleichungen ist folgendes. Sind a und b die Koefficienten von x und y, so verwandle man $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch und bestimme den Werth des letzten Näherungsbruches. Ist dieser $\frac{z_1}{z}$, so muß (§ 132, 5—9) $\frac{a}{b} - \frac{z_1}{z} = \frac{\pm 1}{bz}$ oder $az - bz_1 = \pm 1$ und, indem man mit $\pm c$ multiplicirt, $acz - bcz_1 = c$ oder $- acz + bcz_1 = c$ sein, und wenn u eine eigentliche Zahl von vorläufig unbestimmtem Werthe bezeichnet, so ist jedenfalls $abu - abu + acz - bcz_1 = c$ oder $abu - abu - acz + bcz_1 = c$. Hat nun die gegebene Gleichung die Form $ax - by = c$, so kann man entweder setzen $a(bu + cz) - b(au + cz_1) = c$ oder $a(bu - cz) - b(au - cz_1) = c$, und es ist dann im ersten Falle $bu + cz$ als $= x$ und $au + cz_1$ als $= y$, im zweiten $bu - cz$ als $= x$ und $au - cz_1$ als $= y$ zu betrachten; für u aber kann man im ersten Falle alle positiven Zahlen, ja selbst diejenigen negativen, für welche $bu + cz$ und $au + cz_1$ positiv bleiben, im zweiten aber alle positiven, von der kleinsten an, für welche $bu - cz$ und $au - cz_1$ positiv werden, setzen. Hat aber die gegebene Gleichung die Form $ax + by = c$, so kann man entweder setzen $a(cz - bu) + b(au - cz_1) = c$ oder $a(bu - cz) + b(cz_1 - au) = c$, wonach im ersten Falle x als $= cz - bu$, y als $= au - cz_1$, im zweiten x als $= bu - cz$, y als $= cz_1 - au$ anzunehmen ist; für u aber können negative Zahlen hier gar nicht gesetzt werden und auch hinsichtlich der positiven ist man auf diejenigen beschränkt, für welche im ersten Falle sowohl $cz - bu$ als $au - cz_1$ und im zweiten sowohl $bu - cz$ als $cz_1 - au$ positiv sind, so daß es möglicherweise nur einen oder gar keinen geeigneten Werth giebt, vgl. N. 4. Für das Beispiel in N. 4 erhält man $\frac{105}{43} - \frac{22}{9} = \frac{-1}{387}$ oder $105 . 9 - 43 . 22 = -1$, sodann $- 105 . 17 . 9 + 43 . 17 . 22 = 17$, ferner $105 . 43u - 105 . 43u - 105 . 17 . 9 + 43 . 17 . 22 = 17$, mithin $105 (43u - 17 . 9) - 43 (105u - 17 . 22) = 17$ und $x = 43u - 17 . 9 = 43u - 153$, $y = 105u - 17 . 22 = 105u - 374$, wie in N. 4.

Viertes Kapitel. Gleichungen des zweiten Grades.

§ 162.

1. Eine geordnete vollständige Gleichung des zweiten Grades $ax^2 + bx = c$ wird aufgelöst indem man die linke Seite auf die Form des Quadrates einer Summe, deren erster Summand $= x$, bringt und auch die rechte Seite entsprechend verändert. Setzt man für den zweiten Summanden einstweilen d, so ist $(x + d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$. Dividirt man die gegebene Gleichung beiderseits mit a, so erhält man $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$. Hier steht also $\frac{b}{a}$ an der Stelle von $2d$, wonach $d = \frac{b}{2a}$, $d^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ zu setzen ist. Indem man nun zu beiden Seiten $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ addirt ergiebt sich $x^2 + \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}$ oder $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}$. Radicirt man beiderseits mit 2, so folgt $x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}}$. Diese Wurzel kann aber (§ 77, 1) ebensowohl negativ als positiv genommen werden; man erhält also zuletzt $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}}$, und aus jeder quadratischen Gleichung ergeben sich mithin im Allgemeinen zwei Werthe für die Unbekannte, oder, wie man sagt, jede Gleichung des zweiten Grades hat zwei Wurzeln.

2. Indem man die Gleichung $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$ weiterhin auf die Form $x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{c}{a} = 0$ bringt und endlich $\frac{b}{a} = p$, $-\frac{c}{a} = q$ setzt nehmen die beiden Werthe für x die Form $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ an. Ist nun q an sich positiv und $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$, so fallen die zwei Werthe für x zu dem einzigen $-\frac{p}{2}$ zusammen oder werden, wie man sagt, einander gleich. Ist aber q positiv und $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$, so wird

$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ imaginär, $= \sqrt{-\left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)} =$ $i\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$ (§ 78, 2), und die zwei Werthe für x werden zu konjugirten Ausdrücken, $-\frac{p}{2} + i\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$ und $-\frac{p}{2} - i\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$ (§ 79, 4). Ist endlich q positiv und $\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$, oder ist q an sich negativ, also $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ eine Summe, so sind die Werthe für x beide reell und von einander verschieden.

3. Wenn die quadratische Gleichung auf die Form $x^2 + px + q = 0$ zurückgeführt ist, so ist, indem man die zwei Werthe für x mit x_1 und x_2 bezeichnet, $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$. Denn es ist $\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)$ in jedem Falle $= -\frac{p}{2} + \left(-\frac{p}{2}\right) = -p$, und das Produkt ist in jedem Falle $= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right) = q$ (vgl. auch § 79, 4).

4. Nach N. 2 und 3 läßt sich aus den Koefficienten p und q im Voraus auf die Beschaffenheit von x_1 und x_2 schließen. Ist q an sich negativ, so sind x_1 und x_2 reell und verschieden, und zwar muß der eine Werth positiv, der andre negativ sein; $x_1 + x_2 = -p$ ist also eine positive oder negative Differenz; im ersten Falle, wobei p an sich negativ sein, also die Gleichung, wenn unter p und q bloß eigentliche Zahlen verstanden werden, die Form $x^2 - px - q = 0$ haben muß, ist der positive Werth größer als der (positiv genommene) negative; im zweiten Falle, wobei p an sich positiv sein, also die Gleichung die Form $x^2 + px - q = 0$ haben muß, ist der (positiv genommene) negative Werth größer als der positive. Ist aber q an sich positiv, so sind x_1 und x_2 entweder reell und verschieden, oder reell und gleich, oder imaginär; im ersten Falle sind sie nothwendig entweder beide positiv, wobei ($x_1 + x_2 =$) $-p$ positiv, also p an sich negativ ist, mithin die Gleichung die Form $x^2 - px + q = 0$ hat, oder beide negativ, wobei $-p$ negativ, also p an sich positiv ist, mithin die Gleichung die Form $x^2 + px + q = 0$ hat; ebenso ist es im zweiten Falle, und

Gleiches gilt auch im dritten von den reellen Theilen der konjugirten Ausdrücke.

5. Setzt man den einen Werth von $x = a$ und den andren $= b$, so folgt $x - a = 0$, aber auch $x - b = 0$. Eine solche Differenz wie $x - a$ oder $x - b$ nennt man einen **Wurzelfaktor** der Gleichung, weil die linke Seite der letzteren, wenn man sie auf die Form $x^2 + px + q = 0$ bringt, das Produkt dieser Differenzen ist. Denn kombinirt man $x - a = 0$ und $x - b = 0$ multiplicirend, so ergiebt sich zunächst $(x - a)(x - b) = 0 . 0$ oder $x^2 - (a + b)x + ab = 0$; es ist aber (Nr. 3) $a + b = - p$ oder $-(a + b) = p$ und $ab = q$.

6. Eine **reine** quadratische Gleichung $ax^2 = b$ wird aufgelöst indem man zuerst $x^2 = \frac{b}{a}$, dann $\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{b}{a}}$, nämlich $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$, setzt. Ist $\frac{b}{a}$ an sich positiv, so sind beide Wurzeln reell und verschieden; ist aber $\frac{b}{a}$ negativ, so sind beide Wurzeln imaginär. Gleiche reelle Wurzeln können sich hier nicht ergeben.

Fünftes Kapitel. Bildung der Gleichungen und Deutung der Ergebnisse.

§ 163.

1. Im Bisherigen wurde die **Auflösung** der Gleichungen erörtert; es ist nun noch Einiges zu sagen theils über das, was der Auflösung vorangehn muß, nämlich über die **Bildung der Gleichungen** gemäß den in irgend einer vorgelegten Aufgabe ausgesprochnen **Bedingungen**, theils über das, was der Auflösung meistens noch folgen muß, nämlich über die **Deutung des** einfachen oder mehrfachen **Ergebnisses**.

2. Die Bestimmungsgleichungen sollen entweder zur Bestimmung von bloßen (unbenannten) **Zahlen** oder zur Bestimmung von **Größen** dienen. Im letzteren Falle hat man die Größen zuerst auf benannte Zahlen, und zwar alle gleichartigen Größen auf **gleichbenannte Zahlen**, zurückzuführen, sie sodann nach den in der Aufgabe ausgesprochnen Bedingungen in arithmetische Verbindung zu bringen und endlich, von den Einheitsnamen absehend, die Gleichung wie eine Gleichung zwischen unbenannten Zahlen zu behandeln.

3. Wenn in einer Aufgabe von mehr als einer Unbekannten die Rede zu sein scheint, so stehn gleichwohl diese Unbekannten öfters in solchen arithmetischen Beziehungen zu einander, daß sie sich alle auf eine von ihnen oder auch auf eine erst noch angenommene weitere Un-

bekannte, von der in der Aufgabe zunächst nicht geredet wird, zurückführen lassen, so daß man mit einem einzigen Buchstaben (x) für alle Unbekannten und mit einer einzigen Gleichung ausreicht. Oft ist es auch zweckmäßig, wenn man gewisse Verbindungen derjenigen Unbekannten, nach denen unmittelbar gefragt wird, mit bekannten Zahlen oder unter einander als Unbekannte betrachtet und als solche einfach bezeichnet und erst aus den hiefür zu setzenden Werthen mittelbar die Werthe der eigentlichen Unbekannten herzuleiten sucht.

§ 164.

1. Die Deutung des Ergebnisses (§ 163, 1) ist die Untersuchung, ob und inwiefern die gefundnen Werthe der Unbekannten wirklich dem Sinne der Aufgabe entsprechen. Denn nicht jede Auflösung der Gleichungen kann, auch wenn es sich nur um unbenannte Zahlen handelt, als eigentliche Auflösung der Aufgabe betrachtet werden; sondern es fragt sich erst, ob und inwiefern dieser auch durch negative, gebrochne, irrationale, imaginäre Zahlen und Ausdrücke genügt wird, und es kann sich hienach wohl ergeben, daß die Aufgabe, so wie sie gestellt ist, als eine nicht auflösbare, unmögliche erscheint.

2. Hat es sich um die Bestimmung von Größen gehandelt, so ist zu untersuchen, ob die gefundnen Werthe wirklich für die gesuchten Maßzahlen, sowohl überhaupt als nach Beschaffenheit des gegebenen Falles, gelten können. Dabei ist zunächst daran festzuhalten, daß im Allgemeinen weder Null noch ein negativer (und ebenso wenig ein imaginärer) Ausdruck als Maßzahl gelten kann (vgl. § 139 und 140), so daß, wenn solche Werthe sich ergeben haben, erst noch zu erwägen ist, inwieferne sie doch dem Sinne der Aufgabe entsprechen. Uebrigens giebt es Fälle, in denen die gesuchten Werthe überdies bloß rationale oder (bei diskreten Größen, § 136, 2) selbst bloß ganze Zahlen sein dürfen.

Sechstes Buch.

Erstes Kapitel. Die Logarithmen überhaupt.

§ 165.

1. Wie man (vgl. § 75) die Glieder der Zahlenreihe von 1 an mit 2, mit 3 u. s. f. radicirt denken, sie somit alle als Potenzen eines gewissen Grades betrachten kann, so kann man sie auch alle als Potenzen einer gewissen Grundzahl oder Basis ansehen. Die Exponenten, womit man diese Grundzahl zu potenziren hat, um der Reihe nach die Zahlen von 1 an zu erhalten, heißen die Logarithmen der

Zahlen für jene Grundzahl, und umgekehrt heißt jede Zahl von 1 an die Zahl oder der Numerus des Logarithmen (Logarithmus), womit man die Grundzahl potenziren muß, um die fragliche Zahl zu erhalten. Den Inbegriff der Logarithmen für eine und dieselbe Grundzahl nennt man ein Logarithmen- oder logarithmisches System.

2. Bezeichnet man die Grundzahl allgemein mit a, den Exponenten, womit sie potenzirt werden muß, um die Zahl b zu geben, mit c, so ist c der Logarithme von b für (die Grundzahl) a; in Zeichen: $c = \overset{a}{\log} b$; b aber ist die Zahl oder der Numerus des Logarithmen c für (die Grundzahl) a; in Zeichen $b = \text{num}\left(\overset{a}{\log} = c\right)$.

3. Was auch a sein mag, so ist $\overset{a}{\log} a^b = b$ und daher $\overset{a}{\log} 1 = \overset{a}{\log} a^o = o$ und $\overset{a}{\log} a = \overset{a}{\log} a^1 = 1$.

§ 166.

1. Der Logarithme eines Produktes zweier Zahlen für irgend eine Grundzahl ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren für dieselbe Grundzahl; in Zeichen:

$$\overset{a}{\log} (b \,.\, c) = \overset{a}{\log} b + \overset{a}{\log} c.$$

Denn ist $\overset{a}{\log} b = d$, $\overset{a}{\log} c = e$, so ist $b = a^d$, $c = a^e$, $b \,.\, c = a^d \,.\, a^e = a^{d\,+}$ (§ 55, 2), somit $\overset{a}{\log} (b \,.\, c) = \overset{a}{\log} a^{+\,e} = d + e = \overset{a}{\log} b + \overset{a}{\log} c$.

2. Es wird zunächst immer nur derjenige Ausdruck als Logarithmenzahl oder Logarithmennumerus betrachtet, welcher unmittelbar auf das Logarithmenzeichen log folgt; wollte man daher hier auf der linken Seite der Gleichung die Klammern weglassen, so würde $\overset{a}{\log} b \,.\, c$ vielmehr den mit c multiplicirten Logarithmen von b für die Grundzahl a bedeuten.

3. Der Logarithme eines Quotienten für irgend eine Grundzahl ist gleich der Differenz der Logarithmen des Dividenden und des Divisors für dieselbe Grundzahl; in Zeichen:

$$\overset{a}{\log} \frac{b}{c} = \overset{a}{\log} b - \overset{a}{\log} c\,.$$

Denn ist $\overset{a}{\log} b = d$, $\overset{a}{\log} c = e$, so ist $b = a^d$, $c = a^e$, $\frac{b}{c} = \frac{a^d}{a^e} = a^{d-e}$ (§ 56, 2), also $\overset{a}{\log} \frac{b}{c} = \overset{a}{\log} a^{d-e} = d - e = \overset{a}{\log} b - \overset{a}{\log} c$.

4. Wollte man den Doppelpunkt als Divisionszeichen wählen, so würde man schreiben müssen $\overset{a}{\log} (b : c)$, vgl. N. 2.

§ 167.

1. Der Logarithme einer Potenz für irgend eine (Logarithmen-) Grundzahl oder aus irgend einem Logarithmensysteme ist gleich dem mit dem Potenzexponenten multiplicirten Potenzgrundzahl-Logarithmen aus demselben Systeme; in Zeichen:

$$\overset{a}{\log} b^c = \overset{a}{\log} b \,.\, c \,.$$

Denn es sei $\overset{a}{\log} b = d$, so ist $b = a^d$, $b^c = (a^d)^c = a^{dc}$ (§ 59, 1), also $\overset{a}{\log} b^c = \overset{a}{\log} a^{dc} = d\,c = \overset{a}{\log} b \,.\, c$.

2. Nach § 166, 2 müßte man eigentlich schreiben $\overset{a}{\log}(b^c)$; man pflegt aber hier die Klammern wegzulassen, ohne den Ausdruck $\overset{a}{\log} b^c$ so zu verstehn: die cte Potenz des Logarithmen von b für die Grundzahl a, was man vielmehr so bezeichnen würde $(\overset{a}{\log} b)^c$ oder $\overset{a}{\log}{}^c\, b$. Ferner schreibt man statt $\overset{a}{\log} b \,.\, c$ lieber $c \overset{a}{\log} b$, vgl. § 67, 5.

3. Der Logarithme einer Wurzel für irgend eine Grundzahl ist gleich dem mit dem Wurzelexponenten dividirten Radikanden-Logarithmen aus demselben Systeme; in Zeichen:

$$\overset{a}{\log} \sqrt[c]{b} = \overset{a}{\log} b : c \,.$$

Denn ist $\overset{a}{\log} b = d$, so ist $b = a^d$, $\sqrt[c]{b} = \sqrt[c]{a^d} = a^{d:c}$ (§ 70, 1), mithin $\overset{a}{\log} \sqrt[c]{b} = \overset{a}{\log} a^{d:c} = d : c = \overset{a}{\log} b : c$ (oder $= \frac{1}{c} \overset{a}{\log} b$, § 43, 2).

§ 168.

1. Der Logarithme einer Zahl a für die Grundzahl b giebt, wenn man ihn mit dem Logarithmen von b für die Grundzahl c multiplicirt, den Logarithmen von a für die Grundzahl c; in Zeichen:

$$\overset{b}{\log} a \,.\, \overset{c}{\log} b = \overset{c}{\log} a \,.$$

Denn ist $\overset{b}{\log} a = d$, $\overset{c}{\log} b = e$, so ist $a = b^d$, $b = c^e$, $a = (c^e)^d = c^{de}$, mithin $\overset{c}{\log} a = \overset{c}{\log} c^{de} = d\,e = \overset{b}{\log} a \,.\, \overset{c}{\log} b$.

2. Insofern durch Multiplikation mit $\overset{c}{\log} b$ aus $\overset{b}{\log} a$ sich $\overset{c}{\log} a$ ergiebt, nennt man $\overset{c}{\log} b$ den Modulus des Logarithmensystems, dessen Grundzahl c ist, für das System, dessen Grundzahl b ist.

3. Aus N. 1 folgt $\overset{c}{\log} b = \overset{c}{\log} a : \overset{b}{\log} a$. Setzt man $a = c$, so erhält man $\overset{c}{\log} b = \overset{c}{\log} c : \overset{b}{\log} c$ oder $\overset{c}{\log} b = 1 : \overset{b}{\log} c$. Man erhält also den Modulus des Systems, dessen Grundzahl c ist, für das System, dessen Grundzahl b ist, wenn man 1 mit dem Logarithmen von

c für die Grundzahl b dividirt. Dieser Logarithme ist aber der Modulus des Systems, dessen Grundzahl b ist, für das System, dessen Grundzahl c ist; also ist der Modulus irgend eines Logarithmensystems für irgend ein zweites der reciproke Werth (§ 57, 5) des Modulus dieses zweiten Systems für das erste.

Zweites Kapitel. Die gemeinen Logarithmen.

§ 169.

1. Wenn man eine Tabelle besäße, worin die Logarithmen der Zahlen von 1 an für eine und dieselbe Grundzahl mit den Zahlen selbst zusammengestellt wären, so könnte man z. B. nach § 166, 1 aus den Logarithmen zweier mit einander zu *multiplicirenden* Zahlen durch *Addition* den Logarithmen des Produktes und aus diesem Logarithmen durch Aufsuchen desselben in der Tabelle das Produkt selbst finden. Ebenso würde mit Hülfe einer solchen Tabelle die *Division*, *Potenzirung* und *Radicirung* der Zahlen nach § 166, 3; 167, 1; 167, 3 auf *Subtraktion*, *Multiplikation* und *Division* ihrer Logarithmen zurückkommen. Im Hinblick auf die Vortheile, welche diese Zurückführung verwickelterer Rechnungsarten auf einfachere gewähren müßte, hat man wirklich zu einem Theil der Zahlen von 1 an die Logarithmen für eine und dieselbe Grundzahl berechnet und sie mit ihren Zahlen in sogenannten *Logarithmentafeln* zusammengestellt. Gewöhnlich geben diese Tafeln die Logarithmen für die Grundzahl 10 an; daher nennt man die Logarithmen dieses Systems die *gemeinen* Logarithmen; auch heißen sie *briggische*, nach dem Engländer *Briggs*, der zuerst solche Logarithmen berechnet hat.

2. Die Zahl 10 ist die Grundzahl unsres Zahlen- und Ziffernsystems; ist sie nun auch die Grundzahl des Logarithmensystems, so kann aus der Ziffernanzahl einer numerisch ausgedrückten Zahl n sofort auf die zwei Zahlen geschlossen werden, zwischen denen $\overset{10}{\log}\, n$ liegen muß, wenn er nicht selbst eine ganze Zahl ist. Letzteres ist nur dann der Fall, wenn n eine eigentliche Potenz einschließlich der ersten und der nullten von 10 oder, indem unter k eine eigentliche Zahl oder auch 1 oder o verstanden wird, $n = 10^k$ ist; dann ist (§ 165, 3) $\overset{10}{\log}\, n = \overset{10}{\log}\, 10^k = k$; die Zahl n wird aber (§ 81, 3) durch 1 mit k Nullen, also durch k + 1 Ziffern ausgedrückt, und ihr Logarithme ist mithin um 1 kleiner als ihre Ziffernanzahl. Ist aber n eine von 10^k verschiedne mit k + 1 Ziffern geschriebene Zahl, so ist (vgl. § 110, 2) $10^k < n < 10^{k+1}$, und auch $k < \overset{10}{\log}\, n < k + 1$, somit $\overset{10}{\log}\, n$ größer als die um 1 verminderte Ziffernanzahl von n, aber kleiner als diese Ziffernanzahl selbst.

3. Man kann in diesem Falle $\overset{10}{\log}$ n oder, wie man, wenn 10 die Grundzahl des Logarithmensystems ist, gewöhnlich nur schreibt, log n durch k + m allgemein ausdrücken, wobei unter m eine Zahl zwischen o und 1 zu verstehn, die aber kein echter Bruch, sondern eine Irrationalzahl im erweiterteu Sinne des Wortes (vgl. § 74, 2; 96, 6) ist. Dieser irrationale Ueberschuß m des log n über die nächstkleinere ganze Zahl k, den man numerisch in der Form eines Decimalbruches (vgl. § 114, 3) näherungsweise auszudrücken pflegt, heißt die Mantisse (Zugabe), dagegen die Zahl k die Kennziffer oder Charakteristik des Logarithmen. Meistens sind nur die Mantissen in den Tafeln angegeben, da die Kennziffer sofort aus der Ziffernanzahl der Zahl, wozu der Logarithme gehört, zu bestimmen ist.

4. Die Unterschiede zwischen den Mantissen der Logarithmen zweier zunächst aufeinanderfolgenden Zahlen werden desto kleiner, je größer die Zahlen; auch sind diese Unterschiede, je weiter man in der Zahlenreihe fortgeht, desto weniger von einander selbst verschieden; ja sie werden für gewisse Strecken der Zahlenreihe einander völlig gleich. Freilich gilt diese Gleichheit der logarithmischen Differenzen zunächst immer nur von Näherungswerthen und zwar gerade nur für den Grad der Annäherung, welchen die Werthe, wie sie in den Tafeln gegeben sind, erreichen, d. h. wären diese Werthe auf mehr Decimalstellen berechnet, so würden die Differenzen, die nun einander gleich sind, verschieden ausfallen. Uebrigens gründet sich hierauf die Berechnung der Logarithmen solcher Zahlen, die über die Gränzen der Tafeln hinaus liegen, aus den Logarithmen von Zahlen, die noch in den Tafeln enthalten sind. Soll z. B. der Logarithme für die Zahl 162847 aus einer Tafel bestimmt werden, welche nur die Logarithmen der Zahlen bis 100000 auf 7 Decimalstellen berechnet enthält, so geschieht dies so. Es ist log 16284 = 4,2117611, log 10 = 1,0000000, also (§ 166, 1) log 162840 = log (16284 × 10) = 4, 2117611 + 1,0000000 = 5,2117611; auf gleiche Weise findet man log 162850 = 5,2117878; darf man nun annehmen, daß die logarithmischen Differenzen für die Zahlen von 162840 bis 162850 einander gleich sind (für siebenstellige Logarithmen ist dies aber wirklich der Fall), so wird jede solche Differenz $\frac{1}{10}$ von 5,2117878 — 5,2117611 = 0,0000267 sein müssen; um daher log 162847 zu erhalten, wird man $\frac{7}{10}$ × 0,0000267 zu 5,2117611 addiren müssen oder es wird log 162847 = 5,2117611 + 0,0000187 = 5,2117798 sein. Diese zu addirenden Differenzen finden sich in den Logarithmentafeln unter dem Namen Proportionaltheile schon ausgerechnet vor, worüber die den Tafeln vorangeschickten Einleitungen nachzusehen sind. Da übrigens die Mantissendifferenzen (s. oben) immer kleiner werden, so müssen sie endlich für den Grad der Annäherung, bis zu welchem die Tafeln die Logarithmenwerthe geben, ganz verschwinden, und man kann daher nicht für Zahlen von beliebig vielen Ziffern die Logarithmen auf diese Art finden, son-

dern im Allgemeinen nur noch für Zahlen, deren Ziffernanzahl die Anzahl der Decimalstellen, auf welche die Logarithmen berechnet sind, nicht oder höchstens um 1 übersteigt.

§ 170.

1. Der Logarithme eines unechten Decimalbruches unterscheidet sich von dem des Zählers nur durch die Kennziffer. Denn es ist z. B. log 17845 = 4,2515166; also ist (§ 166, 3) log 1784,5 = log 17845 — log 10 = 4,2515166 — 1,0000000 = 3,2515166; log 178,45 = log 17845 — log 100 = 4,2515166 — 2,0000000 = 2,2515166; log 17,845 = log 17845 — log 1000 = 4,2515166 — 3,0000000 = 1,2515166; log 1,7845 = log 17845 — log 10000 = 4,2515166 — 4,0000000 = 0,2515166.

2. Für einen unechten gemeinen Bruch z. B. $\frac{23}{4}$ ergiebt sich $\log \frac{23}{4} = \log 23 - \log 4 = 1{,}3617278 - 0{,}6020600 =$ 0,7596678. Sucht man die Mantisse dieses Logarithmen in den Tafeln auf, so findet man als zugehörige Zahl 57500, wofür jedoch nach N. 1 und § 169, 2 vielmehr 5,7500 zu setzen ist; d. h. man findet als Logarithmen-Numerus den Decimalbruch, welcher dem gemeinen Bruche $\frac{23}{4}$ gleich ist. Hienach kann man also gemeine Brüche auch mittels der Logarithmen in Decimalbrüche verwandeln.

3. Der Logarithme eines echten Bruches muß sich nach § 166, 3 als eine negative Differenz ergeben, da der Logarithme des Zählers hier nothwendig kleiner ist als der des Nenners (denn je kleiner die Zahl, desto kleiner auch ihr Logarithme, vgl. § 169, 2). Ist nun der Bruch ein Decimalbruch, so ergiebt sich z. B. log 0,056 = log 56 — log 1000 = 1,7481880 — 3,0000000. In diesem Falle pflegt man, wenn die Kennziffer des Minuenden nicht schon = 0 ist, die Differenz nach § 15, 2 so umzuformen, daß man vom Minuenden und vom Subtrahenden die Kennziffer des Minuenden subtrahirt, wonach log 0,056 = 0,7481880 — 2 ist. Auch bei einem gemeinen Bruche kann man auf ähnliche Weise verfahren; es ist z. B. $\log \frac{7}{125} = \log 7 - \log 125 = 0{,}8450980 - 2{,}0969100$; indem man nun nach § 15, 1 zum Minuenden und zum Subtrahenden die Zahl 2 addirt, erhält man zunächst $\log \frac{7}{125} = (0{,}8450980 + 2) -$ $(2{,}0969100 + 2)$ und weiter $= (2{,}8450980 - 2{,}0969100) - 2 =$ 0,7481880 — 2. (Es ist dies wieder der Logarithme des Decimalbruches 0,056, weil dieser $= \frac{7}{125}$.) Man kann aber auch die negative Differenz auf eine negative Zahl zurückführen, wonach z. B.

$\log \frac{7}{125} = -(2{,}0969100 - 0{,}8450980) = -1{,}2518120$ ist, was natürlich $= -(2 - 0{,}7481880)$.

4. Soll die Division eines echten Bruches durch eine ganze Zahl oder einen unechten Bruch mittels der Logarithmen ausgeführt, also von einem Logarithmen, der nach N. 3 die Form einer negativen Differenz hat, ein positiver Logarithme subtrahirt werden, so hat man, wenn der Minuend jener Differenz nicht schon größer ist als der zu subtrahirende positive Logarithme, den Minuenden und den Subtrahenden jener Differenz um so viele Einheiten zu vermehren, daß vom Minuenden der Divisor-Logarithme wirklich subtrahirt werden kann, worauf von dieser Differenz noch der (vermehrte) Subtrahend des Dividenden-Logarithmen (der Form nach) zu subtrahiren ist. So ist z. B. $\log\left(\frac{7}{125} : 57\right) = (0{,}7481880 - 2) - 1{,}7558749 = (2{,}7481880 - 4) - 1{,}7558749 = (2{,}7481880 - 1{,}7558749) - 4 = 0{,}9923131 - 4$. Ist der Divisor-Logarithme bei irgend einer durch Logarithmen auszuführenden Division eine negative Differenz, so addirt man zuerst den Subtrahenden dieser Differenz zum Dividenden-Logarithmen und subtrahirt dann ihren Minuenden; es ist z. B. $\log\left(57 : \frac{7}{125}\right) = 1{,}7558749 - (0{,}7481880 - 2) = (1{,}7558749 + 2) - 0{,}7481880 = 3{,}7558749 - 0{,}7481880 = 3{,}0076869$.

5. Soll nach § 167, 3 eine Wurzel mittels der Logarithmen ausgezogen werden und ist der Logarithme des Radikanden eine negative Differenz, deren Subtrahend durch den Wurzelexponenten nicht theilbar ist, so muß man den Minuenden und den Subtrahenden um so viele Einheiten vermehren, daß der Subtrahend durch den Wurzelexponenten theilbar wird. So ist z. B. $\log \sqrt{\frac{7}{125}} = (0{,}7481880 - 2) : 2 = 0{,}3740940 - 1$, aber $\log \sqrt[3]{\frac{7}{125}} = (1{,}7481880 - 3) : 3 = 0{,}5827293 - 1$.

§ 171.

In neuerer Zeit sind (von Gauß) auch Logarithmentafeln berechnet worden, mittels deren man gegebene Zahlen addiren und subtrahiren kann. Die Einrichtung dieser Tafeln, die namentlich für Fälle dienen sollen, in welchen nicht die Zahlen selbst, sondern ihre Logarithmen gegeben sind, ist im Wesentlichen folgende. Sie enthalten drei Kolumnen, die mit A, B, C bezeichnet werden; in A stehn, erst von Tausendtel zu Tausendtel, dann von Hundertel zu Hundertel, endlich von Zehntel zu Zehntel fortschreitend, die Zahlen von 0 bis 5. Ist eine solche in A stehende Zahl $= \log x$, so ist die in B daneben stehende Zahl $= \log \frac{x+1}{x}$ und die in C daneben stehende Zahl =

log (x + 1). Wenn daher eine in B stehende Zahl = log y ist, so ist die in C daneben stehende Zahl = $\log \frac{y}{y-1}$; denn ist $y = \frac{x+1}{x}$, so ist $\frac{y}{y-1} = \frac{x+1}{x} : \left(\frac{x+1}{x} - 1\right) = x + 1$. Wenn ferner eine in C stehende Zahl = log z ist, so ist die in B daneben stehende Zahl = $\log \frac{z}{z-1}$; denn ist z = x + 1, so ist $\frac{z}{z-1} = \frac{x+1}{x}$. Sind nun zwei Zahlen a und b durch ihre Logarithmen gegeben und ist log a > log b, so suche man, um log (a + b) zu finden, $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$ in A auf; alsdann ist die in B daneben stehende Zahl $= \log \left(\left(\frac{a}{b} + 1\right) : \frac{a}{b}\right) = \log \frac{a+b}{a} = \log (a+b) - \log a$; wird also zu dieser Zahl log a addirt, so ergiebt sich log (a + b). Will man aber log (a — b) finden, so suche man $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$, wenn derselbe < 0,30103 ist, in B, außerdem aber in C auf; dann ist im ersten Falle die in C, im zweiten die in B daneben stehende Zahl $= \log \left(\frac{a}{b} : \left(\frac{a}{b} - 1\right)\right) = \log \frac{a}{a-b} = \log a - \log (a-b)$; wird daher diese Zahl von log a subtrahirt, so ergiebt sich log (a — b). Die Zahlen zu log (a + b) und log (a — b) findet man dann mittels einer gewöhnlichen Logarithmentafel. Vgl. übrigens die den Tafeln vorangeschickten Erläuterungen.

Drittes Kapitel. Die natürlichen Logarithmen.

§ 172.

1. Nach § 122 f. ist $(1 + x)^m = 1 + mx + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \ldots$ Es kann nun die Aufgabe gestellt werden, dieses nach Potenzen von x geordnete Polynom von unbegränzter Gliederzahl in ein nach Potenzen von m geordnetes umzuformen. Das erste Glied dieses neuen Polynoms kann wieder nur 1 sein, während die folgenden Glieder aus den Potenzen m^1, m^2, m^3 . . ., verbunden mit gewissen Koefficienten k, A, B . . . bestehn werden, die vorläufig noch unbekannt sind. Es ist aber $m_2 x^2 = \frac{m(m-1)}{2!} x^2 = \frac{m^2 - m}{2!} x^2$, $m_3 x^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 = \frac{m^3 - 3m^2 + 2m}{3!} x^3$, allgemein $m_n x^n$

$= \frac{m \times \ldots \times (m - (n-1))}{n!} x^n$, wobei der Dividend des Koefficienten, wenn man ausmultiplicirt, immer ein Glied $m(-1)(-2) \times \ldots \times (-(n-1))$ enthalten muß. Somit kommt die Potenz m^1 in allen Gliedern des gegebenen Polynoms vom zweiten Gliede mx an vor; folglich müssen alle Glieder von mx an einen Beitrag zum Koefficienten k von m liefern, und zwar liefert mx den Beitrag x, $m_2 x^2$ den Beitrag $\frac{-1}{2!} x^2 = \frac{-1}{2} x^2$, $m_3 x^3$ den Beitrag $\frac{(-1)(-2)}{3!} x^3$ $= \frac{2!}{3!} x^3 = \frac{1}{3} x^3$, allgemein $m_n x^n$ den Beitrag $\frac{(-1) \times \ldots \times (-(n-1))}{n!} x^n = \frac{\pm (n-1)!}{n!} x^n = \pm \frac{1}{n} x^n$, nämlich $+ \frac{1}{n} x^n$, wenn n ungerade, mithin die Anzahl der negativen Faktoren (-1) bis $(-(n-1))$ gerade ist, und $- \frac{1}{n} x^n$, wenn n gerade ist (vgl. § 124, 6); oder es ist $k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \ldots$.

2. Die Werthe von A, B u. s. f. sind so gut wie der von k ganz unabhängig von dem Werthe von m; denn alle diese Koefficienten können ebenfalls nur aus Potenzen von x, verbunden mit gewissen Multiplikatoren (-1), $(-2) \ldots$ und Divisoren $1, 2 \ldots$ bestehn, und zwar muß sich für die nämliche Potenz von m bei jedem beliebigen Werthe von m der nämliche Koefficient ergeben. Ist also überhaupt $(1+x)^m = 1 + km + Am^2 + Bm^3 \ldots$, so muß, wenn man p oder q oder $p + q$ u. s. f. statt m setzt, auch $(1+x)^p = 1 + kp + Ap^2 + Bp^3 \ldots$ und $(1+x)^q = 1 + kq + Aq^2 + Bq^3 \ldots$ und $(1+x)^{p+q} = 1 + k(p+q) + A(p+q)^2 + B(p+q)^3 \ldots$ sein. Entwickelt man in letzterem Ausdrucke die Potenzen von $p + q$ und ordnet dann Alles nach Potenzen von q, so erhält man $(1+x)^{p+q}$ $= (1 + kp + Ap^2 + Bp^3 \ldots) + (k + 2Ap + 3Bp^2 \ldots)q$ $+ (A + 3Bp \ldots)q^2 + (B \ldots)q^3 + \ldots$. Es ist aber $(1+x)^{p+q}$ auch $= (1+x)^p . (1+x)^q$ oder $= (1+x)^p \times (1 + kq + Aq^2 + Bq^3 \ldots)$ $= (1+x)^p + (1+x)^p kq + (1+x)^p Aq^2 + (1+x)^p Bq^3 \ldots$. Vergleicht man diese beiden Ausdrücke für $(1+x)^{p+q}$ Glied um Glied mit einander, so findet man $1 + kp + Ap^2 + Bp^3 \ldots = (1+x)^p$, $k + 2Ap + 3Bp^2 \ldots = (1+x)^p k$, $A + 3Bp \ldots = (1+x)^p A$, $B \ldots = (1+x)^p B$ u. s. f. Aus $k + 2Ap + 3Bp^2 \ldots =$ $(1+x)^p k = (1 + kp + Ap^2 + Bp^3 \ldots)k = k + k^2 p + Akp^2$ $+ Bkp^3 \ldots$ folgt aber weiter $k = k$, $2A = k^2$, $3B = Ak \ldots$,

mithin $A = \frac{k^2}{2}$, $B = \frac{Ak}{3} = \frac{k^3}{3!} \ldots$ und demnach $(1 + x)^m = 1 + km + \frac{k^2}{2!} m^2 + \frac{k^3}{3!} m^3 + \ldots$

§ 173.

1. Da jede Zahl a sich unter der Form $1 + x$ darstellen läßt, indem $a = 1 + (a - 1)$, so kann auch jede Potenz $a^m = (1 + (a - 1))$ unter der Form $1 + km + \frac{k^2}{2!} m^2 + \frac{k^3}{3!} m^3 \ldots$ dargestellt werden, wobei k nach § 172, 1 den Werth $(a - 1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} \ldots$ hat.

2. Angenommen, es gebe eine Zahl e, für welche $k = (e - 1) - \frac{(e-1)^2}{2} + \frac{(e-1)^3}{3} \ldots$ den Werth 1 habe, so muß $e^m = 1 + km + \frac{k^2}{2!} m^2 + \frac{k^3}{3!} m^3 \ldots$ den Werth $1 + m + \frac{1}{2!} m^2 + \frac{1}{3!} m^3 \ldots$ haben. Setzt man nun $m = 1$, so ist $e^1 = e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \ldots$, woraus man leicht findet $e = 2{,}718281828459 \ldots$

3. Setzt man in N. 1 für $(a - 1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} \ldots$ die Zahl y, so muß a^1, indem 1 an die Stelle von m und y an die Stelle von k tritt, $= 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} \ldots$ sein. Potenzirt man ferner die Zahl $e = 2{,}718281828459 \ldots$ mit $y = (a - 1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} \ldots$, so muß nach N. 2, indem y an die Stelle von m tritt, e^y den Werth $1 + y + \frac{1}{2!} y^2 + \frac{1}{3!} y^3 \ldots$ haben. Es ist also, was auch a bedeuten möge, wenn nur e und y die angegebenen Bedeutungen haben, $a^1 = a = e^y$, somit $y = (a - 1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} \ldots = \overset{e}{\log} a$ oder $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots = \overset{e}{\log}(1 + x)$.

4. Man nennt dieses Logarithmensystem, dessen Grundzahl e ist, das natürliche und schreibt daher, statt $\overset{e}{\log} a$, gewöhnlich log nat a.

Viertes Kapitel. Berechnung der Logarithmen.

§ 174.

1. Wenn (§ 173, 3) allgemein $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots = \log\text{nat}\,(1 + x)$, so muß (vgl. § 125, 1) $\log\text{nat}\,(1 - x) = - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \ldots$ sein, folglich $\log\text{nat}\,(1 + x) - \log\text{nat}\,(1 - x)$ oder $\log\text{nat}\,\frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots\right)$. Setzt man $\frac{1 + x}{1 - x} = \frac{y}{y - 1}$, so folgt $x = \frac{1}{2y - 1}$ und $\log\text{nat}\,\frac{y}{y - 1} = 2\left(\frac{1}{2y - 1} + \frac{1}{3\,(2y - 1)^3} + \frac{1}{5\,(2y - 1)^5} \ldots\right)$ oder $\log\text{nat}\,y = \log\text{nat}\,(y - 1) + 2\left(\frac{1}{2y - 1} + \frac{1}{3\,(2y - 1)^3} + \frac{1}{5\,(2y - 1)^5} \ldots\right)$. Setzt man weiter $y = z^2$, so ergiebt sich $\log\text{nat}\,z^2 = \log\text{nat}\,(z^2 - 1) + 2\left(\frac{1}{2z^2 - 1} + \frac{1}{3\,(2z^2 - 1)^3} + \frac{1}{5\,(2z^2 - 1)^5} \ldots\right)$ oder $2\log\text{nat}\,z = \log\text{nat}\,(z - 1) + \log\text{nat}\,(z + 1) + 2\left(\frac{1}{2z^2 - 1} + \frac{1}{3\,(2z^2 - 1)^3} \ldots\right)$ oder $\log\text{nat}\,z = \frac{1}{2}\log\text{nat}\,(z - 1) + \frac{1}{2}\log\text{nat}\,(z + 1) + \left(\frac{1}{2z^2 - 1} \ldots\right)$. Ist z eine Primzahl > 7, so erhält man log nat z schon nach der Formel $\frac{1}{2}\log\text{nat}\,(z - 1) + \frac{1}{2}\log\text{nat}\,(z + 1) + \frac{1}{2z^2 - 1}$ (mit Vernachlässigung der folgenden Glieder $\frac{1}{3\,(2z^2 - 1)^3}$ u. s. f.) bis auf 7 Decimalstellen genau, und ist z eine Primzahl > 2003, so ist schon $\frac{1}{2}\log\text{nat}\,(z - 1) + \frac{1}{2}\log\text{nat}\,(z + 1)$ bis auf 7 Decimalstellen genau $= \log\text{nat}\,z$.

2. Die natürlichen Logarithmen aller Produktzahlen sind Summen der natürlichen Logarithmen der Primzahlen (§ 91, 1; 166, 1); ist ferner z eine Primzahl (außer 2), so sind (vgl. § 130, 2) $z - 1$ und $z + 1$ gerade Zahlen und ihre natürlichen Logarithmen sind Summen aus log nat 2 und den natürlichen Logarithmen von $\frac{z - 1}{2}$ und

$\frac{z+1}{2}$; also kommt die Berechnung von log nat z aus log nat (z — 1) und log nat (z + 1) auf die Berechnung von log nat (z — 1) und log nat (z + 1) aus den natürlichen Logarithmen der kleineren Zahlen 2, $\frac{z-1}{2}$ und $\frac{z+1}{2}$ zurück; aber log nat $\frac{z-1}{2}$ und log nat $\frac{z+1}{2}$ sind jedenfalls, mögen ihre Zahlen Produktzahlen oder Primzahlen sein, wieder aus den natürlichen Logarithmen noch kleinerer Zahlen zu berechnen, und indem man so immer weiter bis zu den kleinsten Zahlen herabsteigt findet man endlich, daß die natürlichen Logarithmen aller Zahlen aus log nat 2 und log nat 3 berechnet werden können.

3. Diese beiden Logarithmen lassen sich aber so berechnen. Nach N. 1 ist $\log nat\ 2 = \frac{1}{2}\log nat\ 1 + \frac{1}{2}\log nat\ 3 + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3\ .\ 7^3} + \frac{1}{5\ .\ 7^5}\ldots\right)$ oder, da log nat 1 = 0 ist, $= \frac{1}{2}\log nat\ 3 + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3\ .\ 7^3} + \frac{1}{5\ .\ 7^5}\ldots\right)$; ferner ist $\log nat\ 3 = \frac{1}{2}\log nat\ 2 + \frac{1}{2}\log nat\ 4 + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3\ .\ 17^3} + \frac{1}{5\ .\ 17^5}\ldots\right)$ oder, da log nat 4 = 2 log nat 2 ist, $= \frac{3}{2}\log nat\ 2 + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3\ .\ 17^3} + \frac{1}{5\ .\ 17^5}\ldots\right)$; also ist $\log nat\ 2 = \frac{3}{4}\log nat\ 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3\ .\ 17^3} + \frac{1}{5\ .\ 17^5}\ldots\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3\ .\ 7^3} + \frac{1}{5\ .\ 7^5}\ldots\right)$ oder $\log nat\ 2 = 2\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3\ .\ 17^3} + \frac{1}{5\ .\ 17^5}\ldots\right) + 4\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3\ .\ 7^3} + \frac{1}{5\ .\ 7^5}\ldots\right)$; hieraus aber folgt nach Obigem $\log nat\ 3 = 3\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3\ .\ 17^3} + \frac{1}{5\ .\ 17^5}\ldots\right) + 6\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3\ .\ 7^3} + \frac{1}{5\ .\ 7^5}\ldots\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3\ .\ 17^3} + \frac{1}{5\ .\ 17^5}\ldots\right)$ oder $= 4\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3\ .\ 17^3} + \frac{1}{5\ .\ 17^5}\ldots\right) + 6\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3\ .\ 7^3} + \frac{1}{5\ .\ 7^5}\ldots\right)$.

4. Hienach ist log nat 2 = 0,6931472 und log nat 3 = 1,0986123; ferner ist log nat 4 = 2 log nat 2; $\log nat\ 5 = \frac{1}{2}\log nat\ 4 + \frac{1}{2}\log nat\ 6 + \left(\frac{1}{49} + \frac{1}{3\ .\ 49^3} + \frac{1}{5\ .\ 49^5}\ldots\right)$

oder, da log nat 6 = log nat 2 + log nat 3 ist, $= \frac{3}{2}$ log nat 2 + $\frac{1}{2}$ log nat 3 + $\left(\frac{1}{49} + \frac{1}{3\,.\,49^3} \ldots\right)$ = 1,6094379; log nat 7 $= \frac{1}{2}$ log nat 6 + $\frac{1}{2}$ log nat 8 + $\left(\frac{1}{97} + \frac{1}{3\,.\,97^3} \ldots\right)$ oder, da log nat 8 = 3 log nat 2 ist, = 2 log nat 2 + $\frac{1}{2}$ log nat 3 + $\left(\frac{1}{97} + \frac{1}{3\,.\,97^3} \ldots\right)$; log nat 9 = 2 log nat 3; log nat 10 = log nat 2 + log nat 5 = 2,3025851 u. s. f.

§ 175.

1. Aus den natürlichen Logarithmen kann man die gemeinen berechnen indem man jene mit dem Modulus des gemeinen Systems für das natürliche multiplicirt (§ 168, 2). Dieser Modulus, oder log e = log 2,718281828459, ist aber (§ 168, 3) $= \frac{1}{\text{log nat } 10}$, also (§ 174, 4) $= \frac{1}{2{,}3025851}$ = 0,4342945. Demnach ist z. B. log 2 = 0,6931472 × 0,4342945 = 0,3010300; log 3 = 1,0986123 × 0,4342945 = 0,4771213 u. s. f.

2. Umgekehrt findet man, wenn der gemeine Logarithme einer Zahl gegeben ist, ihren natürlichen, indem man jenen mit dem Modulus des natürlichen Systems für das gemeine d. h. mit log nat 10 = 2,3025851 multiplicirt. Da z. B. log 5 = 0,6989700, so ist log nat 5 = 0,6989700 × 2,3025851 = 1,6094379.

Fünftes Kapitel. Logarithmische Gleichungen.

§ 176.

1. Es giebt eine Art von Bestimmungsgleichungen, welche man **logarithmische Gleichungen** nennt, weil sie nur mit Hülfe der Logarithmen aufgelöst werden können; auch heißen sie **Exponentialgleichungen**, weil in ihnen die Unbekannte als Potenz- oder Wurzelexponent gegeben ist.

2. Die einfachste Form, welche eine solche Gleichung haben kann, ist $a^x = b$ oder $\sqrt[x]{a} = b$, und da die Logarithmen gleicher Zahlen einander gleich sein müssen, so ist zunächst im ersten Falle log a^x = log b, im zweiten log $\sqrt[x]{a}$ = log b, und weiter nach § 167, 1 und 3

im ersten Falle $\log a \cdot x = \log b$, mithin $x = \frac{\log b}{\log a}$, und im zweiten Falle $\log a : x = \log b$, mithin $x = \frac{\log a}{\log b}$. Es kann aber die Unbekannte auch mit andren bekannten Zahlen und selbst mit einer zweiten Unbekannten durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzirung, Radicirung verbunden oder auch als Logarithmennumerus gegeben sein; jedenfalls aber wird, wenn die Gleichung auflösbar sein soll, vorausgesetzt, daß die Unbekannte nur als Exponent vorkomme und zwar nur in einem Gliede der Gleichung, oder, wenn sie in zwei Gliedern vorkommt, daß jede Seite der Gleichung überhaupt nur ein Glied (§ 156, 1) enthalte.

3. Die Art der Auflösung bleibt auch bei diesen weniger einfachen Formen der Exponentialgleichungen wesentlich dieselbe, d. h. man setzt, wenn A und B die beiden Seiten der Gleichung bedeuten, zunächst $\log A = \log B$, mit Rücksicht auf § 167, 1 und 3, und verfährt dann je nach Umständen weiter wie im fünften Buche gelehrt worden.

Siebentes Buch.

Erstes Kapitel. Summen- und Differenzenreihen.

§ 177.

1. Ist irgend eine nach einem bestimmten Gesetze fortschreitende Zahlenreihe gegeben, so kann man daraus eine andre Reihe ableiten, deren Glieder das erste Glied, die Summe des ersten und zweiten Gliedes, die Summe der 3, 4, . . . n ersten Glieder der gegebenen Reihe sind. Diese letztere heißt alsdann die Hauptreihe, die aus ihr abgeleitete die summirende oder Summenreihe, und das allgemeine oder nte Glied der Summenreihe, d. h. der Ausdruck, aus welchem sich jedes Glied derselben ergiebt indem man nach und nach statt n die Zahlen 1, 2, 3 . . . setzt, heißt auch das summatorische Glied der Hauptreihe.

2. Ferner kann man aus einer gegebenen Zahlenreihe, der Hauptreihe, eine andre ableiten indem man jedes Glied vom nächstfolgenden subtrahirt; diese abgeleitete Reihe, die Differenzenreihe, kann man wieder als Hauptreihe betrachten und daraus eine zweite Differenzenreihe ableiten u. s. f.; auch kann man die als Hauptreihe gegebene Reihe selbst als Differenzenreihe einer andren Hauptreihe betrachten.

3. Bezeichnet man die Glieder der Hauptreihe nach der Stelle, die sie einnehmen, mit $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ und die Glieder der ersten Differenzenreihe mit $d_1a_1, d_1a_2, d_1a_3 \ldots d_1a_n$, ferner die Glieder der

zweiten Differenzenreihe mit $d_2 a_1$, $d_2 a_2$, $d_2 a_3 \ldots d_2 a_n$, so ist $d_1 a_1 = a_2 - a_1$, $d_1 a_2 = a_3 - a_2$, $d_1 a_n = a_{n+1} - a_n$; ferner ist $d_2 a_1 = d_1 a_2 - d_1 a_1$, $d_2 a_2 = d_1 a_3 - d_1 a_2$, $d_2 a_n = d_1 a_{n+1} - d_1 a_n$ und überhaupt $d^m a_n = d_{m-1} a_{n+1} - d_{m-1} a_n$.

4. Aus dem ersten oder Anfangsgliede der Hauptreihe und den Anfangsgliedern ihrer ersten bis $(n - 1)$ten Differenzenreihe ergiebt sich das nte oder allgemeine Glied der Hauptreihe (vgl. N. 1) indem man $d_1 a_1$, $d_2 a_1$, $d_3 a_1$ u. s. f. bezüglich mit dem ersten, zweiten, dritten u. s. f. Binomialkoefficienten für den Exponenten $n - 1$ multiplicirt und diese Produkte zu a_1 addirt, oder es ist $a_n = a_1 + (n-1)_1 d_1 a_1 + (n-1)_2 d_2 a_1 + (n-1)_3 d_3 a_1 + \ldots + (n-1)_{n-1} d_{n-1} a_1$ (§ 122, 2). Für $n = 2$ ist hienach $a_2 = a_1 + 1 \,.\, d_1 a_1$, wie dies nach N. 2 und 3 nicht anders sein kann. Für $n = 3$ müßte $a_3 = a_1 + 2_1 d_1 a_1 + 2_2 d_2 a_1$ d. h. (§ 122, 5) $= a_1 + 2 d_1 a_1 + d_2 a_1$ sein; es ist aber (N. 3) $a_3 = a_2 + d_1 a_2$, $a_2 = a_1 + d_1 a_1$, $d_1 a_2 = d_1 a_1 + d_2 a_1$, also $a_3 = (a_1 + d_1 a_1) + (d_1 a_1 + d_2 a_1) = a_1 + 2 d_1 a_1 + d_2 a_1$; mithin gilt die aufgestellte Regel auch für $n = 3$. Kann nun gezeigt werden, daß sie, wenn für $n = p$ gültig, auch für $n = p + 1$ gültig ist, so muß sie auch für $n = 4$ und darum auch für $n = 5$ u. s. f., also allgemein gültig sein. Vorausgesetzt nun, es sei $a_p = a_1 + (p-1)_1 d_1 a_1 + (p-1)_2 d_2 a_1 + (p-1)_3 d_3 a_1 + \ldots + (p-1)_{p-1} d_{p-1} a_1$, so muß, wenn man (N. 2) die erste Differenzenreihe als Hauptreihe betrachtet, auch $d_1 a_p = d_1 a_1 + (p-1)_1 d_2 a_1 + (p-1)_2 d_3 a_1 + \ldots + (p-1)_{p-2} d_{p-1} a_1 + (p-1)_{p-1} d_p a_1$ sein; addirt man diese Ausdrücke für a_p und $d_1 a_p$, so erhält man

$$\begin{array}{l} a_1 + (p-1)_1 d_1 a_1 + (p-1)_2 d_2 a_1 + (p-1)_3 d_3 a_1 + \ldots + (p-1)_{p-1} d_{p-1} a_1 \\ \quad + \qquad d_1 a_1 + (p-1)_1 d_2 a_1 + (p-1)_2 d_3 a_1 + \ldots + (p-1)_{p-2} d_{p-1} a_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + (p-1)_{p-1} d_p a_1 \\ \hline a_1 + p_1 d_1 a_1 \quad + \quad p_2 d_2 a_1 \quad + \quad p_3 d_3 a_1 \quad + \ldots + \quad p_{p-1} d_{p-1} a_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + p_p d_p a_1 \end{array}$$

(nach § 122, 4 und 5); es ist aber (N. 3) $a_p + d_1 a_p = a_{p+1}$, also ist wirklich, wenn $a_p = a_1 + (p-1)_1 d_1 a_1 + \ldots + (p-1)_{p-1} d_{p-1} a_1$ ist, auch $a_{p+1} = a_1 + p_1 d_1 a_1 + \ldots + p_p d_p a_1$.

5. Das summatorische Glied der Hauptreihe (N. 1) ergiebt sich aus ihrem Anfangsgliede und den Anfangsgliedern ihrer ersten bis $(n - 1)$ten Differenzenreihe indem man a_1, $d_1 a_1$, $d_2 a_1$ u. s. f. bezüglich mit dem ersten, zweiten, dritten u. s. f. Binomialkoefficienten für den Exponenten n multiplicirt und die Produkte addirt. Bezeichnet man dasselbe mit s_n, so ist $s_1 = a_1$, $s_2 = s_1 + a_2 = a_1 + a_2$; aber a_2 ist (N. 2—4) $= a_1 + d_1 a_1$, also $s_2 = a_1 + (a_1 + d_1 a_1) = 2 a_1 + d_1 a_1$, wofür man schreiben kann $2_1 a_1 + a_2 d_1 a_1$; mithin gilt die Regel für $n = 2$; ferner ist $s_3 = s_2 + a_3$; aber a_3 ist (N. 4) $= a_1 + 2 d_1 a_1 + d_2 a_1$, also $s_3 = (2 a_1 + d_1 a_1) + (a_1 + 2 d_1 a_1 + d_2 a_1) = 3 a_1 + 3 d_1 a_1 + d_2 a_1 = 3_1 a_1 + 3_2 d_1 a_1 + 3_3 d_2 a_1$; somit gilt die Regel auch für $n = 3$. Kann nun gezeigt werden, daß sie, wenn für $n = p$ gültig, auch für $= p + 1$ gültig ist, so muß sie auch für $n = 4$, $n = 5$ u. s. f.,

also allgemein gültig sein. Vorausgesetzt nun, es sei $s_p = p_1 a_1 + p_2 d_1 a_1 + p_3 d_2 a_1 + \ldots + p_p d_{p-1} a_1$, so muß sich hieraus s_{p+1} ergeben indem man a_{p+1} addirt; es ist aber (N. 4) $a_{p+1} = a_1 + p_1 d_1 a_1 + p_2 d_2 a_1 + \ldots + p_{p-1} d_{p-1} a_1 + p_p d_p a_1$; addirt man diesen Ausdruck zu dem für s_p angenommenen, so erhält man

$$\begin{array}{r} p_1 a_1 + p_2 d_1 a_1 + p_3 d_2 a_1 + \ldots + p_p d_{p-1} a_1 \\ a_1 + p_1 d_1 a_1 + p_2 d_2 a_1 + \ldots + p_{p-1} d_{p-1} a_1 + p_p d_p a_1 \\ \hline (p+1)_1 a_1 + (p+1)_2 d_1 a_1 + (p+1)_3 d_2 a_1 + \ldots + (p+1)_p d_{p-1} a_1 + (p+1)_{p+1} d_p a_1 \end{array}$$

(nach § 122, 4 und 5); also ist die Regel wirklich, wenn für s_p, auch für s_{p+1} gültig und es ist allgemein $s_n = n_1 a_1 + n_2 d_1 a_1 + n_3 d_2 a_1 + \ldots + n_n d_{n-1} a_1$.

Zweites Kapitel. Arithmetische Reihen.

§ 178.

1. Sind die Glieder der mten Differenzenreihe einander gleich, so daß die Glieder der (m + 1)ten und jeder folgenden zu Null werden, so heißt die Hauptreihe eine arithmetische Reihe mter Ordnung. Die arithmetische Reihe erster Ordnung nennt man auch eine arithmetische Progression; die arithmetischen Reihen zweiter, dritter u. s. f. Ordnung heißen mit gemeinsamem Namen arithmetische Reihen höherer Ordnung.

2. Das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe mter Ordnung wird aus dem Anfangsgliede der Hauptreihe und den Anfangsgliedern der ersten bis mten Differenzenreihe nach § 177, 4 gefunden, so daß jedenfalls, auch wenn $n - 1 > m$, also (§ 122, 5) ein Binomialkoefficient $(n - 1)_{m+1}$ u. s. f. möglich, doch $(n - 1)_m d_m a_1$ das letzte Glied im Ausdrucke für a_n ist, da nämlich $d_{m+1} a_1$ u. s. f. zu Null wird (N. 1). Für die arithmetische Reihe erster Ordnung ist daher $a_n = a_1 + (n - 1)_1 d_1 a_1$; für die Reihe zweiter Ordnung ist $a_n = a_1 + (n - 1)_1 d_1 a_1 + (n - 1)_2 d_2 a_1$; für die Reihe dritter Ordnung ist $a_n = a_1 + (n - 1)_1 d_1 a_1 + (n - 1)_2 d_2 a_1 + (n - 1)_3 d_3 a_1$ u. s. f.

3. Das summatorische Glied einer arithmetischen Reihe mter Ordnung ergiebt sich aus dem Anfangsgliede derselben und den Anfangsgliedern der ersten bis mten Differenzenreihe nach § 177, 5, so daß jedenfalls, auch wenn $n > m + 1$, also (§ 122, 5) ein Binomialkoefficient n_{m+2} u. s. f. möglich, doch $n_{m+1} d_m a_1$ das letzte Glied im Ausdrucke für s_n ist (vgl. N. 2). Für die arithmetische Reihe erster Ordnung ist daher $s_n = n_1 a_1 + n_2 d_1 a_1$; für die Reihe zweiter Ordnung ist $s_n = n_1 a_1 + n_2 d_1 a_1 + n_3 d_2 a_1$; für die Reihe dritter Ordnung ist $s_n = n_1 a_1 + n_2 d_1 a_1 + n_3 d_2 a_1 + n_4 d_3 a_1$ u. s. f.

§ 179.

1. Eine arithmetische Reihe erster Ordnung oder eine arithmetische Progression heißt eine zunehmende oder steigende, wenn die Glieder ihrer Differenzenreihe positiv, und eine abnehmende oder fallende, wenn sie negativ sind. Jedes von diesen einander gleichen Gliedern heißt die Differenz der Progression.

2. Bezeichnet man das Anfangsglied einer arithmetischen Progression, statt mit a_1, bloß mit a und das erste Glied ihrer Differenzenreihe (oder die Differenz der Progression, N. 1), statt mit $d_1 a_1$, bloß mit d, und hat die Progression bloß n Glieder (oder will man nur die n ersten Glieder in Betracht ziehen), so daß a_n das letzte oder End-Glied, wofür man u setzen kann, bedeutet, so ist (§ 178, 2) $u = a + (n - 1) d$. Ferner ist dann s_n die Summe aller Glieder der Progression, oder kürzer die Summe der Progression, und wenn man dafür bloß s setzt, so ist (§ 178, 3) $s = na + \frac{n(n-1)}{2!} d$. Diesem Ausdrucke kann man auch die Form $\frac{n}{2}(2a + (n - 1) d)$ geben; es ist aber $2a + (n - 1) d = a + u$, also ist s auch $= \frac{n}{2}(a + u)$. Setzt man in diese letztere Gleichung den aus $u = a + (n - 1) d$ sich ergebenden Werth für a, nämlich $u - (n - 1) d$, ein, so folgt $s = \frac{n}{2}(2u - (n - 1) d)$. Endlich folgt aus $s = \frac{n}{2}(a + u)$, daß $n = \frac{2s}{a + u}$; setzt man diesen Werth für n in die Gleichung $u = a + (n - 1) d$, so erhält man $u = a + \left(\frac{2s}{a + u} - 1\right) d$.

3. Aus den fünf Elementen a, d, n, s, u lassen sich fünf Kombinationen zu vieren, nämlich adns, adnu, adsu, ansu, dnsu, bilden. Die Elemente der ersten Kombination sind als Elemente in der unter N. 2 aufgestellten Gleichung $s = \frac{n}{2}(2a + (n - 1) d)$ enthalten, die der zweiten in der Gleichung $u = a + (n - 1) d$, die der dritten in $u = a + \left(\frac{2s}{a + u} - 1\right) d$, die der vierten in $s = \frac{n}{2}(a + u)$, die der fünften in $s = \frac{n}{2}(2u - (n - 1) d)$. Kennt man drei von den vier Elementen einer solchen Kombination, so läßt sich daraus das vierte berechnen indem man die entsprechende Gleichung nach dem unbekannten Elemente auflöst.

§ 180.

1. Die Summenreihe einer arithmetischen Reihe erster Ordnung, deren Anfangsglied 1 und deren Differenz irgend eine eigentliche Zahl

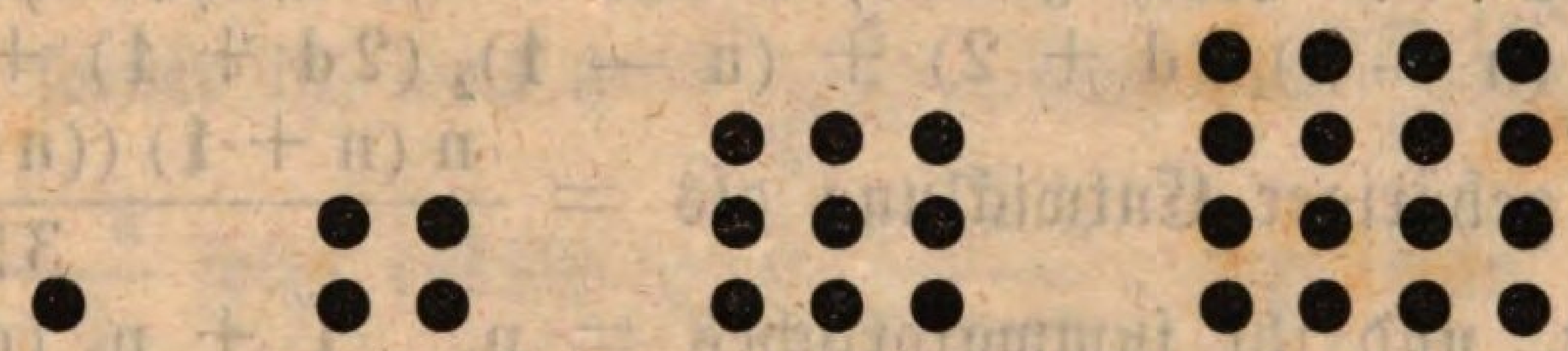
von 1 an ist, nennt man eine Polygonalzahlenreihe, weil sich ihre Glieder, wenn man sie auf irgend eine sinnliche Einheit z. B. einen Zeichnungspunkt bezieht, in Form von Vielecken (Polygonen) darstellen lassen.

2. Das summatorische Glied einer solchen Reihe erster Ordnung oder das allgemeine Glied der daraus entstehenden Polygonalzahlenreihe muß nach § 178, 5 und 179, 2 $= n_1 \,.\, 1 + n_2 d_1$ sein oder $= n + \frac{n(n-1)}{2!} d$, wofür man setzen kann $\frac{n((n-1)d+2)}{2!}$. Hienach ergiebt sich als allgemeine Form einer Polygonalzahlenreihe (indem man n nach und nach mit 1, 2, 3 . . . vertauscht und dadurch das erste, zweite, dritte u. s. f. Glied bildet) folgende: $1,\ d+2,\ 3d+3,\ 6d+4 \ldots$

3. Setzt man $d = 1$, so wird das allgemeine Glied $= \frac{n(n+1)}{2!}$ und die ersten einzelnen Glieder sind 1, 3, 6, 10 . . . Diese Polygonalzahlen heißen insbesondre Trigonalzahlen, weil sie sich in Form von Dreiecken versinnlichen lassen:



Setzt man $d = 2$, so wird das allgemeine Glied $= n^2$ und die ersten einzelnen Glieder sind 1, 4, 9, 16 . . . Diese Polygonalzahlen sind die Tetragonal- oder Quadratzahlen:



Für $d = 3$ ergeben sich die Pentagonal- (Fünfeck-)-Zahlen u. s. f.

4. Die Polygonalzahlenreihe ist eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung; ihre erste Differenzenreihe ist (vgl. N. 2) $d+1,\ 2d+1,\ 3d+1 \ldots$, ihre zweite $d, d \ldots$ Nach § 178, 2 und 3 ist also ihr allgemeines Glied $= 1 + (n-1)_1 (d+1) + (n-1)_2 d = 1 + (n-1)(d+1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} d = \frac{n((n-1)d+2)}{2!}$ (N. 2) und ihr summatorisches $= n_1 \,.\, 1 + n_2 (d+1) + n_3 d =$
$$n + \frac{n(n-1)}{2!}(d+1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} d = \frac{n(n+1)((n-1)d+3)}{3!}.$$
Das summatorische Glied der Trigonalzahlenreihe ist hienach $= \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$, das der Tetragonal- oder Quadratzahlen $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$.

§ 181.

1. Die Summenreihe einer jeden Polygonalzahlenreihe heißt eine **Pyramidalzahlenreihe**, weil sich ihre Glieder, wenn man sie auf irgend eine sinnliche Einheit z. B. einen kugelförmigen physischen Körper bezieht, in Form von Pyramiden darstellen lassen. Polygonalzahlen und Pyramidalzahlen begreift man unter dem gemeinschaftlichen Namen **figurirte Zahlen**.

2. Das allgemeine Glied einer Pyramidalzahlenreihe ist das summatorische der zu Grunde liegenden Polygonalzahlenreihe, also überhaupt (§ 180, 4) $= \frac{n(n+1)((n-1)d+3)}{3!}$. Die allgemeine Form einer Pyramidalzahlenreihe ist daher $1,\ d+3,\ 4d+6,\ 10d+10,\ 20d+15 \ldots$

3. Für die aus den Trigonalzahlen entstehenden **dreiseitigen Pyramidalzahlen** ist das allgemeine Glied (§ 180, 4) $= \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$ und die ersten einzelnen Glieder sind 1, 4, 10, 20 . . . Für die aus den Tetragonalzahlen hervorgehenden **vierseitigen Pyramidalzahlen** ist das allgemeine Glied $\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$ und die ersten einzelnen Glieder sind 1, 5, 14, 30 . . .

4. Die Pyramidalzahlenreihe ist eine arithmetische Reihe **dritter Ordnung**; ihre erste Differenzenreihe ist (vgl. N. 2) $d+2,\ 3d+3,\ 6d+4,\ 10d+5 \ldots$, ihre zweite $2d+1,\ 3d+1,\ 4d+1 \ldots$, ihre dritte $d,\ d \ldots$ Nach § 178, 2 und 3 ist mithin ihr allgemeines Glied $= 1 + (n-1)_1 (d+2) + (n-1)_2 (2d+1) + (n-1)_3 d$, was sich nach gehöriger Entwicklung als $= \frac{n(n+1)((n-1)d+3)}{3!}$ (N. 2) ergiebt, und ihr summatorisches $= n_1 . 1 + n_2 (d+2) + n_3 (2d+1) + n_4 d = \frac{n(n+1)(n+2)((n-1)d+4)}{4!}$. Das summatorische Glied der dreiseitigen Pyramidalzahlen ist hienach $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$, das der vierseitigen $= \frac{n(n+1)(n+2)(2n+2)}{4!} = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$.

5. Zu den arithmetischen Reihen **dritter Ordnung** gehört auch die Reihe der **Kubikzahlen** $1^3, 2^3, 3^3 \ldots$ oder 1, 8, 27, 64, 125 . . .; ihre erste Differenzenreihe ist 7, 19, 37, 61 . . ., ihre zweite 12, 18, 24 . . ., ihre dritte 6, 6 . . .; ihr allgemeines Glied ist also nach § 178, 2 $= 1 + (n-1)_1 . 7 + (n-1)_2 . 12 + (n-1)_3 . 6$, was sich nach gehöriger Entwicklung als $= n^3$ ergiebt; ihr summatorisches Glied aber ist nach § 178, 3 $= n_1 . 1 + n_2 . 7 + n_3 . 12 + n_4 . 6 = \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)^2$.

Drittes Kapitel. Geometrische Progressionen.

§ 182.

1. Eine Zahlenreihe, von deren Gliedern jedes aus dem nächstvorhergehenden durch Multiplikation mit einer bestimmten, für die ganze Reihe sich gleich bleibenden Zahl hervorgeht, nennt man eine geometrische Progression. Der beständige Multiplikator wird gewöhnlich der Quotient der Progression genannt, insofern er sich durch Division irgend eines Gliedes mit dem nächstvorhergehenden ergiebt. Ist er negativ, so werden die Glieder abwechselnd positiv und negativ. Ist er ein echter Bruch, so heißt die Progression eine abnehmende oder fallende, außerdem eine zunehmende oder steigende.

2. Bezeichnet man das erste Glied mit a, den Quotienten mit q, so ist das zweite Glied $= aq$, das dritte $= (aq)q = aq^2$, das vierte $= (aq^2)q = aq^3$, allgemein das nte $= aq^{n-1}$. Hat die Progression bloß n Glieder (oder will man nur ihre n ersten Glieder in Betracht ziehen), so ist hienach, wenn man das letzte Glied mit u bezeichnet, $u = aq^{n-1}$. Bezeichnet man die Summe aller n Glieder mit s, so ist $s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1}$ und $sq = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n$; diese beiden Summen haben die Summanden $aq, aq^2 \ldots$ bis aq^{n-1} mit einander gemein, folglich ist $sq - s = aq^n - a$ und $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$. Dafür kann man, weil $u = aq^{n-1}$, mithin $uq = aq^n$, auch setzen $s = \frac{uq - a}{q - 1}$; ferner ist, weil $a = \frac{u}{q^{n-1}}$, auch $s = \frac{u(q^n - 1)}{q^{n-1}(q-1)}$. Aus $s = \frac{uq - a}{q - 1}$ folgt endlich $q = \frac{s - a}{s - u}$; setzt man diesen Werth in die Gleichung $u = aq^{n-1}$ ein, so erhält man $u = a\left(\frac{s - a}{s - u}\right)^{n-1}$.

3. Aus den fünf Elementen a, n, q, s, u lassen sich fünf Kombinationen zu vieren, nämlich anqs, anqu, ansu, aqsu, nqsu, bilden. Die Elemente der ersten Kombination sind als Elemente in der unter N. 2 aufgestellten Gleichung $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ enthalten, die der zweiten in der Gleichung $u = aq^{n-1}$, die der dritten in $u = a\left(\frac{s - a}{s - u}\right)^{n-1}$, die der vierten in $s = \frac{uq - a}{q - 1}$, die der fünften in $s = \frac{u(q^n - 1)}{q^{n-1}(q-1)}$. Sind drei von den Elementen einer solchen Kombination gegeben, so findet man das vierte indem man die entsprechende Gleichung nach dem unbekannten Elemente auflöst. Bei der Bestimmung von q aus ans und nsu, dann von a aus nsu und von u aus ans geräth man jedoch auf höhere Gleichungen, deren Auflösung außerhalb des Gebietes der Elementaralgebra liegt.

4. Da $\frac{uq - a}{q - 1} = \frac{-(a - uq)}{-(1 - q)} = \frac{a - uq}{1 - q}$, so kann man auch $s = \frac{a - uq}{1 - q}$ setzen. Ist nun q ein echter Bruch, so wird (§ 31, 3; 64, 2) das nte Glied u ($= aq^{n-1}$) desto kleiner, je größer n ist, und man kann es daher um so eher für = o gelten lassen, je größer man sich n denkt, wiewohl es nie wirklich = o werden kann. Wird nun u = o gesetzt, so geht $\frac{a - uq}{1 - q}$ in $\frac{a}{1 - q}$ über, und diesen Ausdruck betrachtet man daher als die Summe einer fallenden geometrischen Progression von unendlich vielen Gliedern, wiewohl er streng genommen nur die Gränze bezeichnet, welcher sich die Glieder der Summenreihe einer solchen Progression immer mehr nähern, ohne sie je zu erreichen. Denn so klein auch u sein mag, so ist doch $uq > o$, also $a - uq < a$ und $\frac{a - uq}{1 - q} < \frac{a}{1 - q}$; indessen wird, je kleiner u, auch uq desto kleiner, folglich wird a — uq immer größer und nähert sich immer mehr dem Werthe a, mithin nähert sich auch $\frac{a - uq}{1 - q}$ immer mehr dem Werthe $\frac{a}{1 - q}$.

Viertes Kapitel. Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen.

§ 183.

1. Es sind im Bisherigen schon manche Beispiele von Zahlenreihen, die nach einem bestimmten Gesetze ins Unendliche fortlaufen, vorgekommen; solche Reihen heißen unendliche Reihen. Mehrere von ihnen theilen mit den fallenden geometrischen Progressionen die in § 182, 4 erwähnten beiden Eigenschaften, daß ihre einzelnen Glieder immer mehr abnehmen, ohne jemals = o zu werden, und daß die Glieder ihrer Summenreihe sich fortwährend einer mehr oder weniger genau bestimmbaren Zahl als ihrer unerreichbaren Gränze nähern. Von solchen unendlichen Reihen sagt man, sie seien konvergent oder sie konvergiren. Je nachdem die Glieder einer solchen Reihe mehr oder weniger schnell abnehmen, mithin schon früher oder erst später als = o betrachtet werden dürfen, konvergirt die Reihe schneller oder langsamer. Will man die Summe der n ersten Gliedee mit Vernachlässigung aller folgenden für die Summe der Reihe (die, weil sie unendlich ist, keine vollständige Summirung gestattet, so daß auch jener Gränzwerth streng genommen nicht als die Summe der Reihe gelten kann, vgl. § 182, 4) gelten lassen (was nur bei solchen konvergenten unendlichen Reihen geschehen darf), so kann n desto kleiner sein, je schneller die Reihe konvergirt.

2. Alle unendlichen Reihen, welche nicht die beiden Eigenschaften der konvergenten besitzen, sind divergent oder divergiren. Dazu gehören also erstens alle diejenigen, deren Glieder fortwährend zunehmen, wie z. B. die Reihe der eigentlichen Zahlen; zweitens alle diejenigen, welche zwar die erste Eigenschaft der konvergenten Reihen besitzen aber nicht die zweite. Eine solche Reihe ist die der Einheitsbrüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$ Hier nehmen zwar die Glieder der Reihe selbst immer mehr ab, aber die Glieder der Summenreihe nähern sich nicht einem bestimmbaren Gränzwerthe, sondern nehmen ins Unendliche zu.

3. Ob eine unendliche Reihe mit fortwährend abnehmenden Gliedern zu den konvergenten gehöre, läßt sich nicht nach einer allgemeingültigen Regel erkennen; doch giebt es einige besondre Regeln. Es seien z. B. $a, a_1, a_2 \ldots$ die Glieder einer solchen Reihe, demnach $\frac{a_1}{a} = q$ ein echter Bruch, $\frac{a_2}{a_1} = q_1$ ebenfalls ein echter Bruch und zwar $< q$, $\frac{a_3}{a_2} = q_2$ sei wieder ein echter Bruch und $< q_1$ u. s. f., so ist $a_1 = a\,q$, $a_2 = a_1 q_1 = a\,q\,q_1$, $a_3 = a_2 q_2 = a\,q\,q_1 q_2$ u. s. f. und $a_2 < a\,q^2$, $a_3 < a\,q^3$ u. s. f., d. h. die Glieder der Reihe von a_2 an sind kleiner als die entsprechenden Glieder $p_2, p_3 \ldots$ einer fallenden geometrischen Progression, deren Anfangsglied $p_1 = a_1$ und deren Quotient $= q$. Da nun die Glieder der Summenreihe dieser geometrischen Progression den Gränzwerth $\frac{p_1}{1-q}$ (§ 182, 4) niemals erreichen, obschon sie sich ihm immer mehr nähern, so können noch weniger die kleineren Glieder der Summenreihe von $a_1, a_2, a_3 \ldots$ diesen Gränzwerth erreichen, wiewohl sie sich ihm immer mehr nähern; also konvergirt die Reihe $a_1, a_2, a_3 \ldots$ ebenfalls. Wenn daher bei irgend einer unendlichen Reihe von irgend einem Gliede an jedes Glied kleiner als das entsprechende Glied einer fallenden geometrischen Progression ist, so gehört die Reihe zu den konvergenten. Dies ist z. B. der Fall bei der Reihe $1 + km + \frac{k^2}{2!} m^2 + \frac{k^3}{3!} m^3 \ldots$ (§ 172, 2); denn hier ist allgemein $\left(\frac{k^n}{n!} m^n\right) : \left(\frac{k^{n-1}}{n-1!} m^{n-1}\right) = \frac{k}{n} m = \frac{km}{n}$; da nun, während k und m sich gleich bleiben, n immer größer wird, so muß, wie groß auch km sein möge, endlich $\frac{km}{n}$ ein echter Bruch werden, der dann immer mehr abnimmt; also sind von hier an die Glieder der fraglichen Reihe nothwendig kleiner als die Glieder einer fallenden geometrischen Progression, deren Quotient der erste Bruchwerth von $\frac{km}{n}$ und deren Anfangsglied gleich dem Gliede der fraglichen Reihe, bei welchem sich dieser Werth von $\frac{km}{n}$ ergeben hat, ist. Aus gleichem

Grunde konvergirt die Reihe $1 + m + \frac{1}{2!} m^2 + \frac{1}{3!} m^3 \dots$ (§ 173, 2). Ferner konvergirt die Reihe $\frac{1}{2z^2 - 1} + \frac{1}{3(2z^2 - 1)^3} + \frac{1}{5(2z^2 - 1)^5} \dots$ (§ 174, 1), weil ihre Glieder kleiner sind als die Glieder einer fallenden geometrischen Progression, deren Anfangsglied ebenfalls $\frac{1}{2z^2 - 1}$ und deren Quotient $\frac{1}{(2z^2 - 1)^2}$ ist.

4. Wenn die Glieder einer Reihe theils positiv theils negativ sind und es findet Konvergenz statt, wenn man die negativen Glieder als positiv betrachtet, so konvergirt die Reihe auch so wie sie gegeben ist. Denn giebt es einen Gränzwerth, den die Summe der Glieder nicht erreicht, wenn sie alle positiv sind, so wird derselbe noch weniger erreicht, wenn sie zum Theil negativ sind, wodurch die Summe verkleinert wird.

5. Eine Reihe, deren Glieder ohne Rücksicht auf die Vorzeichen immer mehr abnehmen, ist immer konvergent, wenn dieselben abwechselnd positiv und negativ sind. Denn es sei $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 \dots$, so muß $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 \dots$, weil $= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots$, jedenfalls positiv und $> a_1 - a_2$, aber, weil $= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) \dots, < a_1$ sein; also giebt es eine zwischen $a_1 - a_2$ und a_1 liegende Gränze, der sich die Glieder der Summenreihe von gerader Stellenzahl, wie $s_2 = a_1 - a_2$, $s_4 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4)$ u. s. f., durch Größerwerden, die Glieder von ungerader Stellenzahl, wie $s_1 = a_1$, $s_3 = a_1 - (a_2 - a_3)$ u. s. f., durch Kleinerwerden immer mehr nähern, ohne sie je zu erreichen. Eine solche Reihe ist z. B. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5} \dots$ (vgl. N. 2).

Vögl